www.rajteachers.com

गणित

कक्षा 6



राजकीय विद्यालयों में निःशुल्क वितरण हेतु

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

प्रकाशक

राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

संस्करण : 2016

© राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर
© राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

मूल्य :

पेपर उपयोग : आर. एस. टी. बी. वाटरमार्क
80 जी. एस. एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल
2–2 ए, झालाना डूंगरी, जयपुर

मुद्रक :

मुद्रण संख्या :

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलैक्ट्रानिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।

- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाऐगी।

- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

- किसी भी प्रकार का कोई परिवर्तन केवल प्रकाशक द्वारा ही किया जा सकेगा।

पाठ्यपुस्तक निर्माण
वित्तीय सहयोगः
यूनिसेफ राजस्थान, जयपुर

www.rajteachers.com

प्राक्कथन

बदलती हुई परिस्थितियों के अनुरूप शिक्षा में परिवर्तन होना जरूरी है, तभी विकास की गति तेज होती है। विकास में सहायक कई तत्त्वों के अलावा शिक्षा भी एक प्रमुख तत्त्व है। विद्यालयी शिक्षा को प्रभावशाली बनाने के लिए पाठ्यचर्या को समय–समय पर बदलना एक आवश्यक कदम है। वर्तमान में राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम 2009 के द्वारा यह स्पष्ट है कि समस्त शिक्षण क्रियाओं में 'बालक' केन्द्र के रूप में हैं। हमारी सिखाने की प्रक्रिया इस प्रकार हो कि बालक स्वयं अपने अनुभवों के आधार पर समझ कर ज्ञान का निर्माण करें। उसके सीखने की प्रक्रिया को ज्यादा से ज्यादा स्वतंत्रता दी जाए, इसके लिए शिक्षक एक सहयोगी के रूप में कार्य करें। पाठ्यचर्या को सही रूप में पहुँचाने के लिए पाठ्यपुस्तक महत्त्वपूर्ण साधन है। अतः बदलती पाठ्यचर्या के अनुरूप ही पाठ्यपुस्तकों में परिवर्तन कर राज्य सरकार द्वारा नवीन पाठ्यपुस्तक तैयार कराई गई है।

पाठ्यपुस्तक तैयार करने में यह ध्यान रखा गया है कि पाठ्यपुस्तक सरल, सुगम, सुरुचिपूर्ण, सुग्राह्य एवं आकर्षक हो, जिससे बालक सरल भाषा, चित्रों एवं विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से इनमें उपलब्ध ज्ञान को आत्मसात् कर सके। साथ ही वह अपने सामाजिक एवं स्थानीय परिवेश से जुड़े तथा ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक गौरव, संवैधानिक मूल्यों के प्रति समझ एवं निष्ठा बनाते हुए एक अच्छे नागरिक के रूप में अपने आप को स्थापित कर सके।

शिक्षकों से मेरा विशेष आग्रह है कि इस पुस्तक को पूर्ण कराने तक ही सीमित नहीं रखें, अपितु पाठ्यक्रम एवं अपने अनुभव को आधार बना कर इस प्रकार प्रस्तुत करें कि बालक को सीखने के पर्याप्त अवसर मिले एवं विषय शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति की जा सके।

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.) उदयपुर पाठ्यपुस्तक विकास में सहयोग के लिए उन समस्त राजकीय एवं निजी संस्थानों, संगठनों यथा एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली, राज्य सरकार, भारतीय जनगणना विभाग, आहड़ संग्रहालय उदयपुर, जनसंपर्क निदेशालय जयपुर, राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल जयपुर, विद्या भारती, विद्या भवन संदर्भ केन्द्र पुस्तकालय, उदयपुर एवं लेखकों, समाचार पत्र–पत्रिकाओं, प्रकाशकों तथा विभिन्न वेबसाइट्स के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने पाठ्यपुस्तक निर्माण में सामग्री उपलब्ध कराने एवं चयन में सहयोग दिया। हमारे प्रयासों के बावजूद किसी लेखक, प्रकाशक, संस्था, संगठन और वेबसाइट का नाम छूट गया हो तो हम उनके आभारी रहते हुए क्षमा प्रार्थी हैं। इस संबंध में जानकारी प्राप्त होने पर आगामी संस्करणों में उनका नाम शामिल कर लिया जाएगा।

www.rajteachers.com

पाठ्यपुस्तकों की गुणवत्ता बढ़ाने हेतु श्री कुंजीलाल मीणा, शासन सचिव, प्रारंभिक शिक्षा, श्री नरेशपाल गंगवार, शासन सचिव, माध्यमिक शिक्षा एवं आयुक्त राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा परिषद्, श्री बाबूलाल मीणा, निदेशक प्रारंभिक शिक्षा एवं श्री सुवालाल, निदेशक माध्यमिक शिक्षा, श्री बी. एल. जाटावत, आयुक्त, राजस्थान प्रारम्भिक शिक्षा परिषद्, जयपुर, राजस्थान सरकार का सतत् मार्गदर्शन एवं अमूल्य सुझाव संस्थान को प्राप्त होते रहे हैं। अतः संस्थान हृदय से आभार व्यक्त करता है।

इस पाठ्यपुस्तक का निर्माण यूनिसेफ के वित्तीय एवं तकनीकी सहयोग से किया गया है। इसमें सेम्युअल एम., चीफ यूनिसेफ राजस्थान जयपुर, सुलग्ना रॉय शिक्षा विशेषज्ञ एवं यूनिसेफ से संबंधित अन्य सभी अधिकारियों के सहयोग के लिए संस्थान आभारी है। संस्थान उन सभी अधिकारियों एवं कार्मिकों का, जिनका प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से इस कार्य संपादन में सहयोग रहा है, उनकी प्रशंसा करता है।

मुझे इस पुस्तक को प्रस्तुत करते हुए प्रसन्नता हो रही है, साथ ही यह विश्वास है कि यह पाठ्यपुस्तक विद्यार्थियों एवं शिक्षकों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी और अध्ययन–अध्यापन एवं विद्यार्थी के व्यक्तित्व विकास की एक प्रभावशाली कड़ी के रूप में कार्य करेगी।

विचारों एवं सुझावों को महत्त्व देना लोकतंत्र का गुण है अतः राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान उदयपुर सदैव इस पुस्तक को और श्रेष्ठ एवं गुणवत्तापूर्ण बनाने के लिए आपके बहुमूल्य सुझावों का स्वागत करेगा।

निदेशक
राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं
प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

www.rajteachers.com

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

संरक्षक : विनीता बोहरा, निदेशक, राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.,) उदयपुर

मुख्य समन्वयक: नारायण लाल प्रजापत, उपनिदेशक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

समन्वयक: डॉ. ममता बोल्या, अनुसंधान सहायक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

संयोजक: उमंग पण्ड्या, वरिष्ठ अध्यापक, रा.मा.वि. वाका, बाँसवाड़ा

लेखकगण: रूपेन्द्र मोहन शर्मा, जिला सचिव, विद्या भारती, बा.उ.मा. आदर्श विद्या मंदिर, दौसा

ओंकार दास वैष्णव, से.नि. प्रधानाचार्य, चित्तौड़गढ़

रणवीर सिंह, उपप्रधानाचार्य, डाइट, कोटा

लालाराम सेन, वरि. व्या., डाइट, जालोर

सुशीला मेनारिया, व्या., डाइट, उदयपुर

डॉ. रेखा शर्मा, व्या., रा.बा.उ.मा.वि. झाड़ोल, फलासिया

संजय बोल्या, व.अ.,रा.उ.मा.वि. छाली, गोगुन्दा, उदयपुर

कमलकान्त स्वामी, व.अ.,रा.उ.मा.वि. सर्वोदय बस्ती, बीकानेर

कौशल डी. पण्ड्या, कार्यक्रम अधिकारी, रमसा, बाँसवाड़ा

जनक जोशी, ब्लॉक संदर्भ्य व्यक्ति, एस.एस.ए.,घाटोल, बाँसवाड़ा

महेन्द्र सोनी, व.अ.,रा.मा.वि. बुद्धनगर, जोधपुर

कमल अरोड़ा, व.अ.,रा.मा.वि. झाड़ोली, गोगुन्दा, उदयपुर

यशवन्त दवे, व.अ.,रा.उ.मा.वि. बम्बोरा, उदयपुर

दुर्गेश कुमार जोशी, अध्या., रा.उ.प्रा.वि. उदलियास (माफी), भीलवाडा

शहनाज, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. गाडरियावास, भीण्डर

कपिल पुरोहित, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. सिवड़िया, गोगुन्दा, उदयपुर

इन्दर मोहन सिंह छाबड़ा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. मेवाड़ों का मठ, कोटड़ा

अरविन्द शर्मा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. साकरिया, प्रतापगढ़

आवरण एवं सज्जा: डॉ. जगदीश कुमावत, प्राध्यापक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

चित्रांकन: शाहिद मोहम्मद, अजमेर

तकनीकी सहयोग: हेमन्त आमेटा, व्याख्याता, एस.आई.ई.आर.टी. उदयपुर

कम्प्यूटर ग्राफिक्स: अनुभव ग्राफिक, अजमेर

निःशुल्क वितरण हेतु

www.rajteachers.com

शिक्षकों के लिए

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामन्जस्य बिठाने एवं राज्य के विद्यार्थियों को अधिगम के उन स्तरों तक दक्षता प्रदान करने के लिए नवीन पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकों का निर्माण किया गया हैं।

बालक की शैक्षिक जगत के प्रति समझ विकसित करने के साथ–साथ बालक की अन्तर्निहित क्षमताओं को विकसित करने, उच्च मानवीय मूल्यों व नैतिक गुणों का विकास करने, राष्ट्र के लिए भविष्य में निष्ठावान, देशभक्त एवं संवेदनशील नागरिक तैयार करने के उद्देश्य से इस पाठ्यक्रम का सृजन किया गया हैं।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रुपरेखा–2005 के मुख्य मार्ग–दर्शक सिद्धान्तों को शिक्षक आत्मसात कर उनकी मूल भावना के अनुरुप पाठ्यपुस्तक की विषयवस्तु को बालकों तक पहुँचाए, शिक्षक से यह अपेक्षा की गई है।

इस पाठ्यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित है– विद्यार्थियों को विषय से परिचय उनके आसपास से संबंधित उदाहरणों से कराया गया हैं। इसमें यह भी ध्यान रखा गया है कि अधिगम हेतु आवश्यक सामग्री कम लागत या आसपास के परिवेश से उपलब्ध हो सके ताकि कक्षा शिक्षण में अध्यापक उन सामग्रियों का उपयोग कर, गतिविधि के माध्यम से बालकों की सहभागिता के साथ अधिगम को प्रभावी बना सके।

बालक को केंद्र बिन्दु मानकर सीखने की प्रक्रिया में बालक का भागीदारी सुनिश्चित कर उन्हें स्वयं करके देखने अपनी गलतियों को स्वयं ठीक करने के लिए समुचित अवसर उपलब्धा करवाने एवं उनमें समझ विकसित करने के लिए कार्य किया जाए।

निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम–2009 के प्रावधानानुसार सतत् एंव व्यापक मूल्यांकन के अनुसार विषयवस्तु निर्मित की गई है। अतः बालकों को स्तरानुसार समूह में बाँटकर समूह शिक्षण पर बल देकर बालकों में दक्षताएँ विकसित की जाए।

पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्रों के माध्यम से समझाया गया है। उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं, ताकि विद्यार्थियों में अवधारणाओं को अपने स्तर पर समझ कर प्रश्नों को बेहतर ढ़ंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि हो सके तथा समस्याओं को हल करने में उनकी भागीदारी बढ़ सके।

बालकों में गणितीय सोच विकसित करने, गणितीय तथ्यों की पुनः खोज करने, आरेखण एवं मापन के लिए उपयुक्त दक्षता के विकास हेतु अनेक गतिविधियाँ दी गई हैं जिन्हें '**करो और सीखो**' का नाम दिया गया है। बालकों को यह गतिविधियाँ इसी भावना जिम्मेदारी, सहिष्णुता एवं सहयोग के अनुरुप करवाया जाना अपेक्षित है।

www.rajteachers.com

पाठ्यपुस्तक में राष्ट्रीय सरोकार यथा पर्यावरण संरक्षण, सड़क सुरक्षा, जेण्डर संवेदनशीलता, बेटी बचाओ बेटी पढ़ाओ, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति की आवश्यकता एवं जागरूकता आदि का ध्यान में रखा गया है। अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए। उन्हें विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उक्त प्रमुख संदेशों को गणितीय समस्याओं की शब्दावली के माध्यम से पहुँचाने चाहिए। बालकों को इन राष्ट्रीय सरोकारों के साथ जोड़ने एवं इनके प्रति उनमें समझ बनाने का प्रयास किया जाना अपेक्षित है।

अध्यापक अपनी सुविधानुसार कक्षा के बालकों को छोटे – छोटे समूह एवं उपसमूह बनाकर उन्हें गतिविधि करने का मौका दें ताकि स्व–अध्ययन कि प्रवृत्ति को बढ़ाकर एक सहयोगी के रूप में अपनी जिम्मेदारी तय कर सके। पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली एवं पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों को "**हमने सीखा**" के रूप में स्थान दिया गया है।

भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय एवं उनका गणित में योगदान का भी उल्लेख किया गया है ताकि बालक भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीयों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति अपनी समझ बना सकें।

पाठ्यपुस्तक एवं पाठ्यक्रम को तैयार करने में बालक को केंद्र में मानकर शिक्षक पर सर्वाधिक विश्वास इस भावना के साथ किया गया है कि शिक्षक इन संप्रयत्नों की पूर्ति हेतु पूर्ण निष्ठा लगन एवं ईमानदारी के साथ बालक के साथ कार्य करेगा। लेखक समूह शिक्षक पर भरोसा कर यह पाठ्यपुस्तक राज्य के शिक्षकों एवं बालकों को समर्पित करता है।

भारत में गणित की समृद्ध परम्परा रही है। आदिकाल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है। पुरातन ज्ञान का उपयोग आधुनिक गणित में किया जा सके एवं प्राचीन उपलब्धियों का तारतम्य आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के लिए किया जा सके, इसी उद्देश्य से पाठ्यपुस्तक में भारतीय अंक प्रणाली (देवनागरी) एवं वैदिक गणित का समावेश किया गया है। वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

निःशुल्क वितरण हेतु

www.rajteachers.com

अनुक्रमणिका

क्र.सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ सं.
1	संख्याओं की समझ	1–18
2	रिश्ते संख्याओं के	19–33
3	पूर्ण संख्याएँ	34–44
4	ऋणात्मक संख्याएँ एवं पूर्णांक	45–55
5	भिन्न	56–73
6	दशमलव संख्याएँ	74–84
7	वैदिक गणित	85–109
8	आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएँ एवं रचनाएँ	110–137
9	सरल द्विविमीय आकृतियाँ	138–151
10	त्रिविमीय आकृतियाँ	152–158
11	सममिति	159–164
12	बीजगणित	165–175
13	अनुपात व समानुपात	176–188
14	परिमाप एवं क्षेत्रफल	189–205
15	आँकड़ों का प्रबन्धन	206–223
	उत्तरमाला	224–239
	परिशिष्ट	240

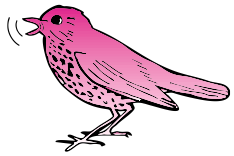
www.rajteachers.com

अध्याय 1

संख्याओं की समझ

1.1 हम अपनी आवश्यकता के अनुसार वस्तुओं को गिनते हैं। जैसे विद्यालय में बच्चों की संख्या, गाँव में रहने वाले लोगों की संख्या, पुस्तकालय में रखी पुस्तकों की संख्या, फर्श पर लगी टाइलों की संख्या आदि। हम इन संख्याओं को उचित संख्यांकों द्वारा निरूपित कर सकते हैं। अब सोच कर बताओ कि आप आस–पास की कितनी वस्तुओं को गिन सकते हो?

कई हजार वर्ष पहले, लोग केवल छोटी संख्याओं के बारे में ही जानते थे। धीरे–धीरे उन्होंने अपनी आवश्यकतानुसार बड़ी संख्याओं के साथ कार्य करना सीखा और इन संख्याओं को संकेतों के रूप में व्यक्त करना भी सीखा। संख्याएँ यह बताने में हमारी सहायता करती हैं कि वस्तुओं का कौनसा समूह (संग्रह) बड़ा अथवा छोटा है? संख्याओं की सहायता से हम वस्तुओं को निश्चित क्रम में व्यवस्थित भी कर सकते हैं।



हम पिछली कक्षा में चार अंकों तक की संख्याओं के साथ खेल चुके हैं। इस अध्याय में पिछले अनुभवों का दोहरान करते हुए आगे की संख्याओं के बारे में अपनी समझ बनाएँगे।

1.1.1 संख्या बनाना

रमेश और अफसाना चार अंकों की संख्याएँ बना रहे हैं। रमेश ने 3, 5, 7 और 8 इन चार अंकों से एक संख्या बनाई –

5378

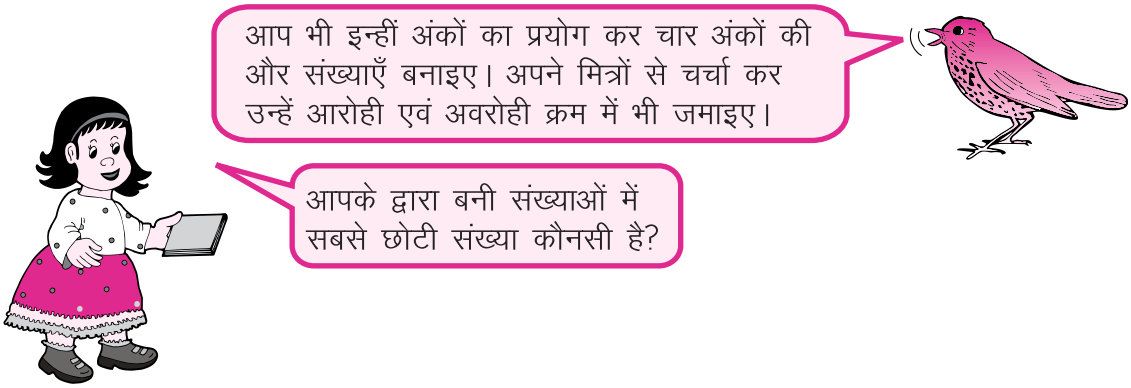


अफसाना ने इन्हीं चार अंकों से एक और संख्या बनाई

8753



www.rajteachers.com

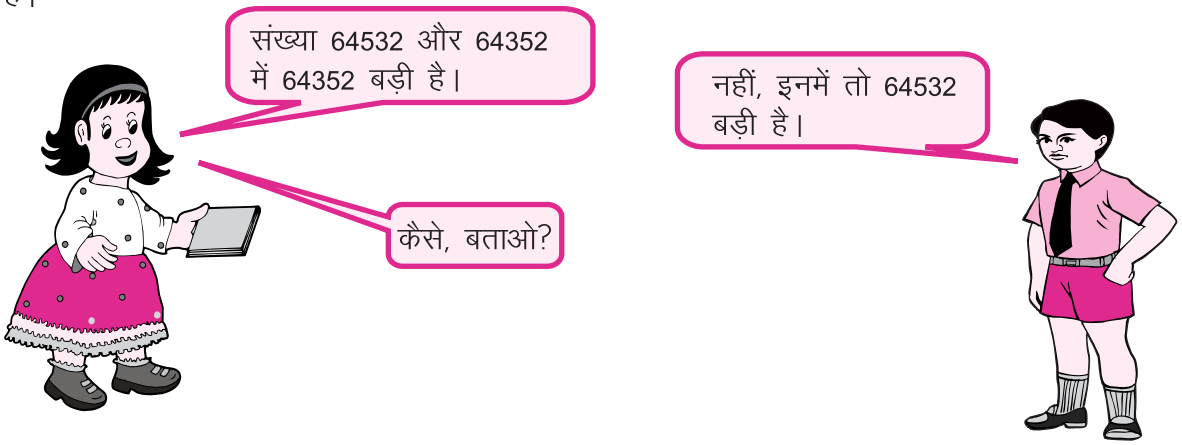


1.1.2 संख्याओं की तुलना

देविका एक खेल खेलती है। वह साथियों को 2, 0, 1 अंक दे कर संख्या बनाने को कहती है। रोहित ने 210, ममता ने 21 बनाया। तब देविका कहती है किसकी संख्या बड़ी है ? रोहित कहता है मेरी, क्योंकि मेरी संख्या में अंक ममता की तुलना में ज्यादा है। अब देविका ने कहा 4, 5, 2, 6 और 3 से पाँच अंकों की संख्या बना कर देखते हैं। आप भी और संख्याएँ बना कर नीचे तालिका में लिखिए –

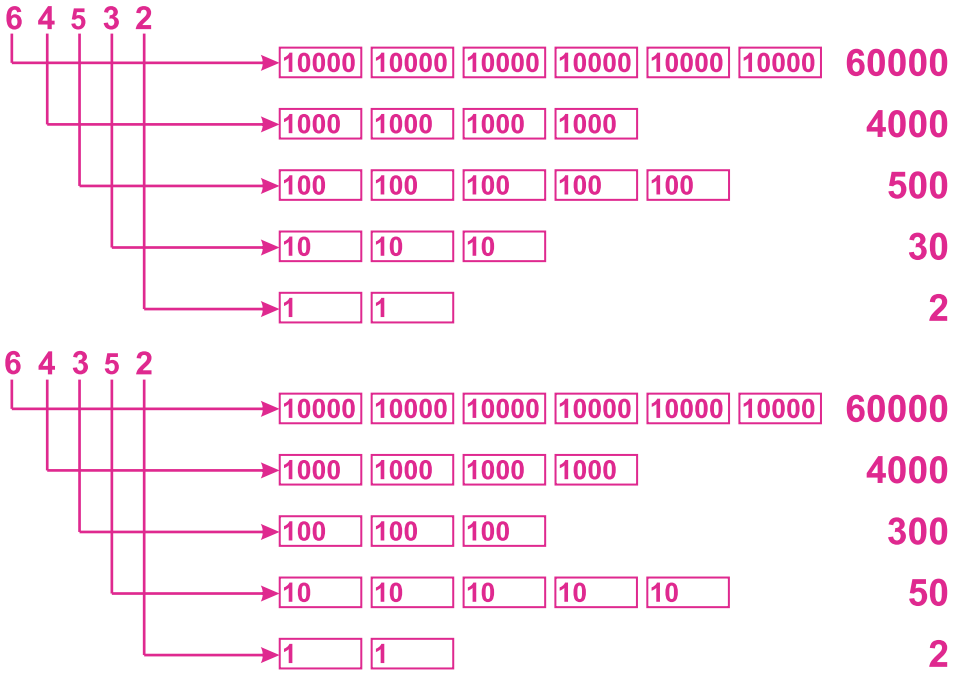
52643	बावन हजार छः सौ तैंतालीस
65234	पैंसठ हजार दो सौ चौंतीस
64532	----------
23456	----------
65432	----------
64352	----------
----------	----------
----------	----------
----------	----------

रोहित संख्याएँ देख कर बोला इनमें से सबसे बड़ी संख्या 65432 है एवं सबसे छोटी संख्या 23456 है।



www.rajteachers.com

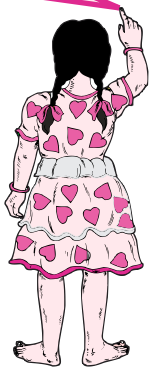
रोहित ने संख्याओं की तुलना इस तरह की



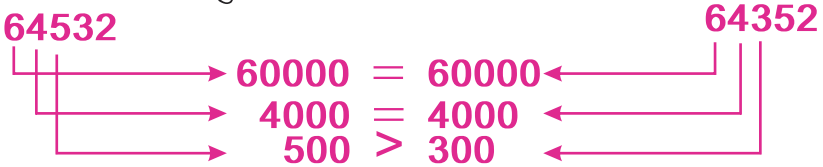


क्या मैं दो संख्याओं की तुलना संख्याओं के प्रत्येक अंक का स्थानीयमान निकाले बिना भी कर सकता हूँ?

दोनों संख्याओं में दस हजार और हजार के स्थान के अंक समान हैं। 64532 में सैंकड़े के स्थान पर 5 है जबकि 64352 में सैंकड़े के स्थान पर 3 है और 532 तो 352 से बड़ी है इसलिए 64532 बड़ी है।



हम संख्याओं की तुलना इस प्रकार भी कर सकते हैं।

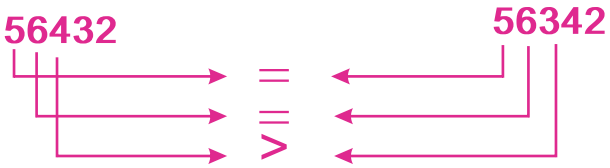


संख्या 64532, संख्या 64352 से बड़ी है। 64532 > 64352

संख्या 56432 व 56342 में तुलना –

अब आप दोनों संख्याओं 56432 और 56342 में बाएँ से दाएँ की ओर के अंकों की तुलना करें जो अंक बड़ा होगा वह संख्या बड़ी होगी।





क्या आप पता लगा पाए कि कौनसी संख्या बड़ी है?



www.rajteachers.com

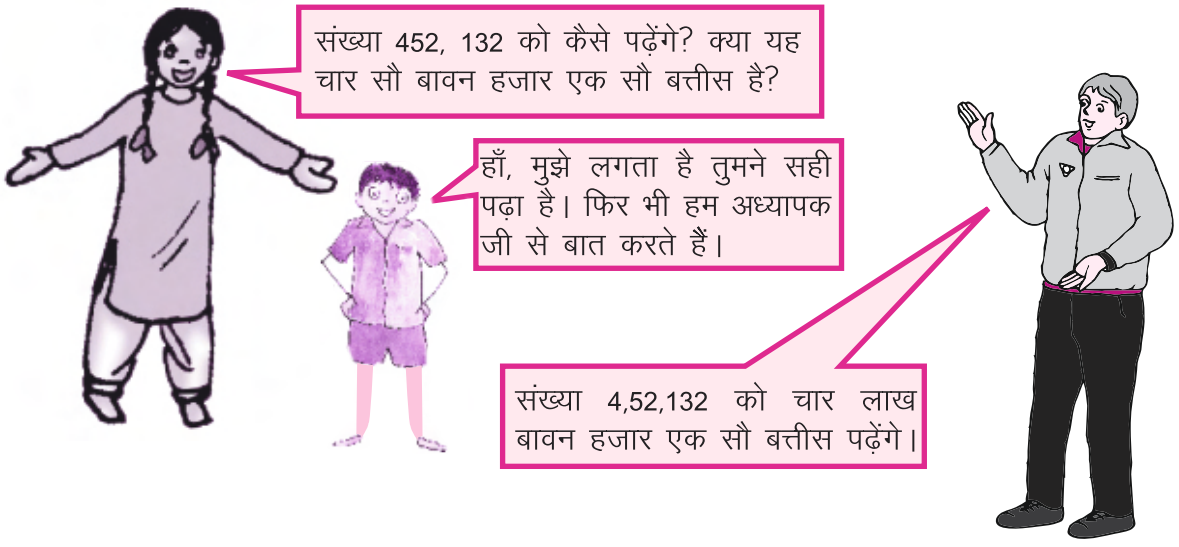
करो और सीखो

1. निम्नलिखित संख्या समूह में सबसे बड़ी संख्या पर गोल घेरा (o) एवं सबसे छोटी संख्या पर क्रॉस (x) का चिह्न लगाइए।
   (i) 4536, 4892, 4370, 4452
   (ii) 15623, 15073, 15189, 15800
   (iii) 25286, 25245, 25270, 25210
   (iv) 6895, 23787, 24569, 24659
   (v) 4685, 4444, 3847, 9071
2. नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

52,132	5 दस हजार, 2 हजार, 1 सैंकड़ा, 3 दहाई, 2 इकाई 50,000 + 2,000 + 100 + 30 + 2	बावन हजार एक सौ बत्तीस
45,471		
98,453		
67,309		
70,058		
12,345		
29,761		
33,333		
81,427		

ऊपर दी गई तालिका में सबसे बड़ी संख्या पर o (गोल घेरा) एवं सबसे छोटी संख्या पर ☐ बनाइए।

1.1.3 संख्याओं को पढ़ना



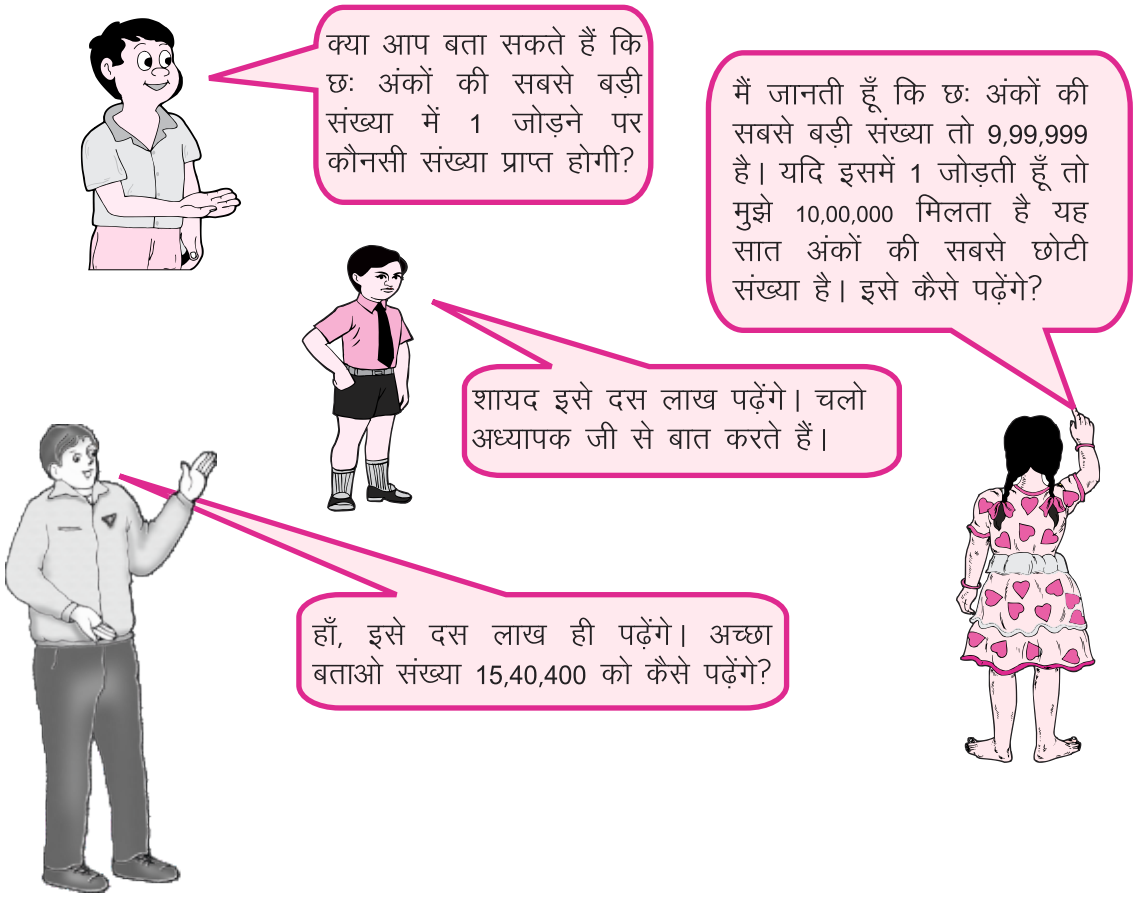
www.rajteachers.com

आप भी अपनी पसंद के छः अंक लेकर उनसे संख्याएँ बनाकर अपने साथियों से पढ़वाएँ और संख्याओं की तुलना करें।

नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

संख्या (अंकों में)	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	संख्या (शब्दों में)
3,52,027	3	5	2	0	2	7	तीन लाख बावन हजार सत्ताईस
2,43,596							
7,00,295							
9,99,999							
1,00,000							
5,67,890							
6,04,307							
.....							

अपने साथियों से चर्चा कर तालिका में दी गई संख्याओं को आरोही क्रम में जमाइए।



www.rajteachers.com

करो और सीखो

1. निम्नलिखित संख्या नामों की संख्या लिखिए।
   (i) पाँच हजार पाँच – 5005
   (ii) पाँच हजार चार सौ अड़तीस – .....
   (iii) अड़तीस हजार चार सौ – .....
   (iv) पैंसठ हजार सात सौ चालीस – .....
   (v) नवासी हजार तीन सौ चौबीस – .....
   (vi) बाईस लाख पाँच हजार दो – .....
   (vii) पचासी लाख आठ सौ एक – .....
   (viii) सात लाख सात हजार सात – .....

2. अंक 6 का स्थान वही रखते हुए 6350947 के अंकों को पुनः किसी भी क्रम में रखने पर बनने वाली सबसे छोटी संख्या होगी–
   (i) 6975430 (ii) 6043579 (iii) 6034579 (iv) 6034759 ( )

3. 7, 8 एवं 9 के प्रयोग से बनी पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या होगी–
   (i) 98978 (ii) 99897 (iii) 99987 (iv) 98799 ( )

4. नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

संख्या (अंकों में)	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	संख्या (शब्दों में)
57,68,423	5	7	6	8	4	2	3	सत्तावन लाख अड़सठ हजार चार सौ तेईस
99,99,999								
40,50,607								
32,05,004								
10,00,000								
98,76,543								

अपने साथियों से चर्चा कर तालिका में दी गई संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।

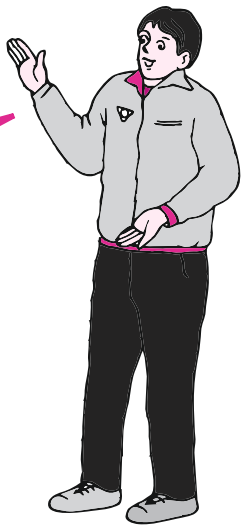




www.rajteachers.com



मुझे भी नहीं मालूम, चलो अध्यापक जी से पूछते हैं।



इसे एक करोड़ पढ़ते हैं। यह आठ अंकों की सबसे छोटी संख्या भी है।



इसका मतलब संख्या 2,20,51,965 को दो करोड़ बीस लाख इक्यावन हजार नो सौ पैंसठ पढ़ेंगे।

करो और सीखो

नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

संख्या (अंकों में)	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	संख्या (शब्दों में)
4,53,10,670	4	5	3	1	0	6	7	0	चार करोड़ तिरपन लाख दस हजार छह सौ सत्तर
4,35,01,076									
7,65,43,201									
1,00,00,000									
9,09,09,009									
6,50,41,300									

अपने साथियों से चर्चा कर तालिका में दी गई संख्याओं को आरोही एवं अवरोही क्रम में लिखिए।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को शब्दों में लिखिए।
   (i) 5782 (ii) 75,879 (iii) 3,89,087
   (iv) 21,32,452 (v) 7,68,92,479 (vi) 50,60,798

www.rajteachers.com

2. निम्नलिखित को संख्यांकों के रूप में लिखिए।
   (i) अड़सठ हजार पाँच सौ उनतीस (ii) नवासी हजार उनासी
   (iii) पाँच लाख बहत्तर हजार सत्तावन (iv) नब्बे लाख नब्बे हजार नौ सौ नब्बे
   (v) एक करोड़ इक्कीस लाख इकत्तीस हजार इकतालीस

3. आपके पास 5, 7, 0, 6, 1, 3 और 4 के अंक हैं। इनका प्रयोग करते हुए सात अंकों की पाँच संख्याएँ बनाइए।

4. निम्नलिखित संख्याओं की तुलना बॉक्स में <, > और = का चिह्न लगाकर कीजिए–
   (i) 1403789 ☐ 140378 (ii) 560325 ☐ 560326
   (iii) 732108 ☐ 732208 (iv) 32872015 ☐ 32852017
   (v) 612345 ☐ 611345

5. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए।
   (i) 8435, 4835, 13584, 5348, 25843 (ii) 1100, 1001, 1011, 1010
   (iii) 50500, 50050, 55555, 50505
   (iv) 58695376, 58685376, 58695306, 58685378

6. निम्नलिखित संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।
   (i) 847, 9754, 8320, 571 (ii) 4060, 6040, 4600, 4646
   (iii) 9801, 25751, 36501, 38802 (iv) 10001, 11001, 10101, 10011

1.2 संख्यांकन पद्धति

1.2.1 भारतीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की भारतीय पद्धति में हम इकाई, दहाई, सैंकड़ा, हजार का प्रयोग करते हैं तथा आगे लाख और करोड़ का प्रयोग करते हैं। हजार, लाख और करोड़ वाली संख्या को प्रदर्शित करने के लिए उनके बीच अल्पविरामों का प्रयोग किया जाता है। पहला अल्पविराम सौ के स्थान (दाएँ से बाएँ चलते हुए तीसरे अंक) के बाद आता है और हजार को प्रदर्शित करता है। दूसरा अल्पविराम अगले दो अंकों (दाएँ से पाँचवें अंक) के बाद आता है और लाख को प्रदर्शित करता है। तीसरा अल्प विराम अगले दो अंकों (दाएँ से सातवें अंक) के बाद आता है और करोड़ को प्रदर्शित करता है।

1 दहाई = 10 इकाईयाँ
1 सैंकड़ा = 10 दहाईयाँ
= 100 इकाईयाँ
1 हजार = 10 सैंकड़ा
= 100 दहाईयाँ
1 लाख = 100 हजार
= 1000 सैंकड़ा
1 करोड़ = 100 लाख
= 10,000 हजार

www.rajteachers.com

1.2.2 अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में इकाई, दहाई, सैंकड़ा , हजार और आगे मिलियन का प्रयोग किया जाता है। हजार और आगे मिलियन को प्रदर्शित करने के लिए अल्पविरामों का प्रयोग किया जात है। अल्पविराम दाएँ से बाएँ प्रत्येक तीसरे अंक के बाद आता है। पहला अल्पविराम हजार को प्रदर्शित करता है और दूसरा अल्पविराम मिलियन को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ संख्या 22,051,965 को अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में बाईस मिलियन इक्यावन हजार नौ सौ पैंसठ पढ़ा जाता है।

सोचें! – कितने लाख से एक मिलियन बनता है?

कितने मिलियन से एक करोड़ बनता है?

पाँच बड़ी संख्याओं को लीजिए। इन्हें भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय दोनों संख्यांकन पद्धतियों में व्यक्त कीजिए।

1.3 अलग–अलग लिपि में संख्याएँ

हिन्दू अरेबिक अंक	देवनागरी अंक	रोमन अंक
1	१	I
2	२	II
3	३	III
4	४	IV
5	५	V
6	६	VI
7	७	VII
8	८	VIII
9	९	IX
10	१०	X
11	११	XI
12	१२	XII
13	१३	XIII
14	१४	XIV
15	१५	XV

रोमन पद्धति में बड़ी संख्याओं को इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

संख्याएँ	20	30	50	100	500	1000
रोमन पद्धति में	XX	XXX	L	C	D	M

www.rajteachers.com

(i) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति होने पर वह जितनी बार आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है।

(ii) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति तीन से अधिक बार नहीं की जाती है। संकेत V, L व D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(iii) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाईं और लग जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है।

(iv) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर लग जाता है तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है।

(v) संकेत V, L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है। संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M, व C में से ही घटाया जा सकता है।

1.4 इकाईयों की समझ

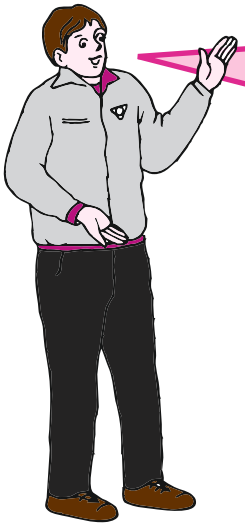
हमने पिछली कक्षा में लम्बाई के इकाई के रूप में सेमी, मीटर और किलोमीटर का प्रयोग किया था।



जब मैं अपनी नई पेंसिल को नापता हूँ तो उसकी लम्बाई 17 सेमी से अधिक एवं 18 सेमी से कम प्राप्त होती है। इसका सही नाप कितना है?

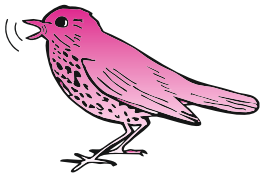
मुझे भी नहीं मालूम





देखिए 17 सेमी और 18 सेमी के बीच समान दूरी पर दस निशान बने हैं। प्रत्येक निशान मिलिमीटर को बताता है। तुम्हारी पेंसिल की लम्बाई 17 सेमी के आगे 8 निशान तक है तो इसकी नाप 17 सेमी 8 मिलिमीटर है इसे 17.8 सेमी (सत्रह दशमलव आठ सेंटीमीटर) भी कह सकते हैं।

आइए, लम्बाई की इकाइयों के बीच के संबंध को जानते हैं।



10 मिलीमीटर = 1 सेंटीमीटर (1 सेमी)
100 सेंटीमीटर = 1 मीटर (1 मी)
1000 मीटर = 1 किलोमीटर (1 किमी)

www.rajteachers.com



क्या तुम बता सकते हो कि 1 किलोमीटर में कितने सेंटीमीटर होते हैं?

क्यों नहीं देखो ऐसे



1 किमी = 1000 मीटर

= 1000 x 100 सेमी.

= 1,00,000 सेमी.

हमने पिछली कक्षा में वजन तोलने के लिए किलोग्राम और ग्राम के बाटों का प्रयोग किया था।

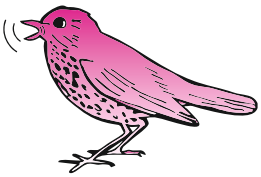


क्या तुम बता सकते हो कि 1 किलोग्राम में कितने ग्राम होते है?



क्यों नहीं
1 किग्रा में 1000 ग्राम होते हैं।

1 किग्रा = 1000 ग्राम



आपने सुनार की दुकान पर बाट देखे होंगे। वहाँ ग्राम से भी छोटे वजन को तोलने के बाट होते हैं ये मिलीग्राम (मिग्रा) के बाट होते हैं।

1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम

हमने पिछली कक्षा में तरल पदार्थों को लीटर और मिलीलीटर में मापा था एवं लीटर और मिलीलीटर के बीच के संबंध को भी जाना था।

1 लीटर = 1000 मिलीलीटर

ध्यान दीजिए कि इन सभी मात्रकों में हमने मिली, सेंटी, किलो शब्दों का प्रयोग किया है। किलो का अर्थ है हजार और यह सबसे बड़ा है। सेंटी, सोवाँ भाग दर्शाता है और मिली का अर्थ है हजारवाँ भाग और यह सबसे छोटा है।

www.rajteachers.com

1.5 व्यावहारिक प्रयोग में बड़ी संख्याएँ

खिचड़ी किराणा स्टोर से एक माह की खरीद का विवरण इस प्रकार है–

किराणा स्टोर
भाव सूची

शक्कर	–	35 रु. प्रति किग्रा
गुड़	–	40 रु. प्रति किग्रा
नमक	–	7 रु. प्रति किग्रा
शुद्ध घी	–	395 रु. प्रति किग्रा
चाय पत्ती	–	175 रु. प्रति किग्रा
मिर्च पाउडर	–	180 रु. प्रति किग्रा
धनिया पाउडर	–	170 रु. प्रति किग्रा
हल्दी पाउडर	–	170 रु. प्रति किग्रा
सींग दाना	–	90 रु. प्रति किग्रा
तेल	–	85 रु. प्रति लीटर
चना दाल	–	65 रु. प्रति किग्रा
तुअर दाल	–	115 रु. प्रति किग्रा
चावल बासमती	–	65 रु. प्रति किग्रा
बेसन	–	70 रु. प्रति किग्रा
मूंग	–	60 रु. प्रति किग्रा
साबुन टिकिया (75 ग्राम)	–	13 रु. प्रति नग

खरीद का विवरण

गुड	325	किग्रा
शक्कर	3837	किग्रा
चावल बासमती	906	किग्रा
सींगदाना	164	किग्रा
शुद्ध घी	500	किग्रा
तुअर दाल	1369	किग्रा
चाय पत्ती	188	किग्रा
नमक	234	किग्रा
मिर्च पाउडर	93	किग्रा
धनिया पाउडर	147	किग्रा
हल्दी पाउडर	189	किग्रा
चना दाल	3273	किग्रा
साबुन टिकिया (75 ग्राम)	13048	नग



www.rajteachers.com

1. क्या खिचड़ी किराणा स्टोर द्वारा पिछले माह बेची गई सामग्री का कुल भार बता सकते हैं। (साबुन टिकिया के भार को जोड़े बिना)
2. पिछले माह बेची गई साबुन टिकिया का कुल भार किलोग्राम में कितना होगा?
3. किराणा स्टोर को शक्कर व चाय की बिक्री से कितनी राशि प्राप्त हुई?
4. किराणा स्टोर द्वारा नमक व मिर्च बेचने से कितनी राशि प्राप्त हुई ?

उदाहरण 1 वर्ष 2001 में तलवाड़ा नगर की जनसंख्या 3,38,401 थी। वर्ष 2011 तक जनसंख्या में 88,765 की वृद्धि हो गई। वर्ष 2011 में इस नगर की जनसंख्या क्या थी?

हल 2011 में तलवाड़ा नगर की जनसंख्या = 2001 में जनसंख्या + जनसंख्या में वृद्धि

= 3,38,401 + 88,765

= 4,27,166

```
  3,38,401
+ 88,765
----------
  4,27,166
```

उदाहरण 2 एक समाचार पत्र में 18 पृष्ठ हैं। प्रतिदिन 10,03,912 प्रतियाँ छपती हैं। बताओ प्रतिदिन कितने पृष्ठ (पेज) छपते हैं?

हल प्रतिदिन छपने वाली प्रतियों की संख्या = 10,03,912

अतः 10,03,912 प्रतियों में (10,03,912 x 18) पृष्ठ होंगे

अतः प्रतिदिन 1,80,70,416 पृष्ठ छपते हैं।

```
  10,03,912
x        18
----------
  8031296
 1003912X
----------
 18070416
```

उदाहरण 3 राज्य में सत्र 2014–15 में 12,38,792 विद्यार्थियों को छात्रवृत्ति प्रदान की गई। सत्र 2015–16 में 17,92,304 विद्यार्थियों को छात्रवृत्ति प्रदान की गई। बताओ किस वर्ष में अधिक छात्रवृत्तियाँ प्रदान की गई और कितनी अधिक?

हल सत्र 2015–16 में अधिक छात्रवृत्तियाँ प्रदान की गई

(संख्या 17,92,304 , संख्या 12,38,792 से बड़ी है।)

सत्र 2015–16 में छात्रवृत्तियों में वृद्धि

= (सत्र 2015–16 में प्रदान की गई छात्रवृत्तियाँ) - (सत्र 2014–15 में प्रदान की गई छात्रवृत्तियाँ)

= 17,92,304 – 12,38,792

= 5,53,512

```
  17,92,304
-12,38,792
----------
  5,53,512
```

अतः सत्र 2015–16 में छात्रवृत्ति प्राप्त करने वाले छात्रों में 5,53,512 की वृद्धि हुई।

उदाहरण 4 दियासलाई (माचिस तीली) बनाने वाली कम्पनी में प्रतिदिन 15,07,150 दियासलाई (माचिस तीली) बनाई जाती है। यदि एक माचिस की डिब्बी में 50 तीलियाँ रखी जाती हैं तो बताइए 15,07,150 तीलियों को रखने के लिए कितनी डिब्बियों की आवश्यकता पड़ेगी?

हल एक माचिस के डिब्बे में 50 तीलियाँ रखी जाती हैं।

अतः 15,07,150 तीलियाँ रखने के लिए डिब्बियों की आवश्यकता होगी

= 15,07,150 ÷ 50

= 30143

www.rajteachers.com

```
      30143
   ┌─────────
50 | 1507150
   −150
   ------
    00071
     −50
    ------
      215
     −200
    ------
      0150
      −150
    ------
        000
```

अतः 15,07,150 माचिस की तीलियाँ रखने के लिए 30143 डिब्बियों की आवश्यकता पड़ेगी।

प्रश्नावली 1.2

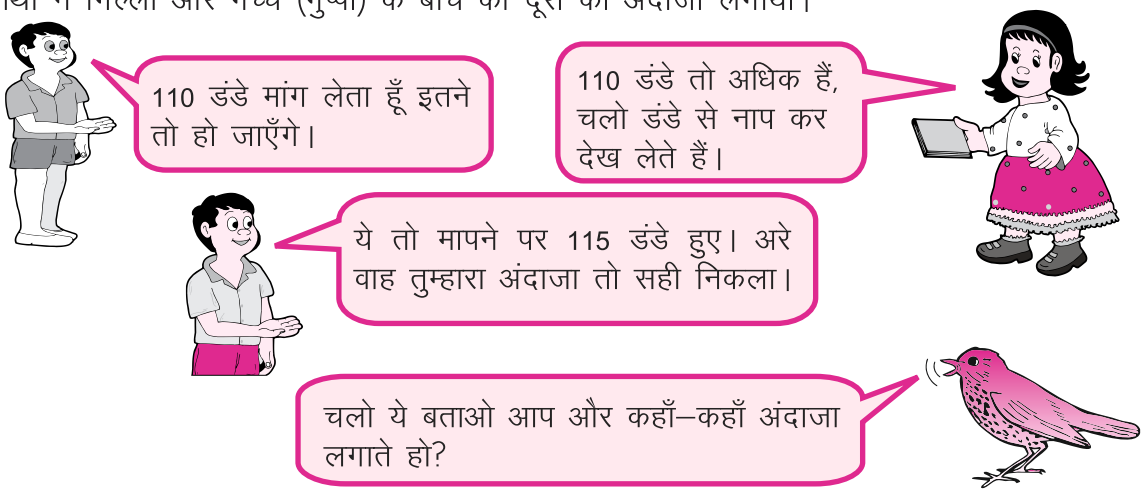
1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) 1 हजार =..... दहाईयाँ (ii) 100 लाख=..... करोड़
   (iii) 1 किग्रा = ... ग्राम (iv) 100 सेमी =..... मीटर
   (v) 1 किमी =..... मीटर (vi) 1 लीटर=..... मिलीलीटर
2. लोकसभा चुनाव में विजयी प्रत्याशी को 6,42,312 वोट मिले। उसने अपने निकटतम प्रतिद्वंद्वी को 65,318 वोटों से हराया। बताइए निकटतम प्रतिद्वंद्वी को कितने वोट मिले?
3. दशहरे मेले को प्रथम 4 दिनों में क्रमशः 3079, 5768, 9014 व 12,306 लोगों ने देखा। बताइए इन चार दिनों में मेला देखने कुल कितने लोग आए?
4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने टेस्ट क्रिकेट में 15030 रन बनाए एवं एक दिवसीय क्रिकेट में 18999 रन बनाए। बताइए दोनों खेलों में कुल कितने रन बनाए?
5. अंकों 5, 3, 9, 7 और 4 में से प्रत्येक का केवल एक बार प्रयोग करते हुए बनाई जा सकने वाली सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्याओं का अंतर ज्ञात कीजिए?
6. स्वरोजगार समूह के सदस्य प्रतिदिन 1385 पापड़ बनाते हैं। बताइए अगस्त माह में कुल कितने पापड़ बनेंगे?
7. एक घंटे में एक हवाई जहाज 685 किलोमीटर की दूरी तय करता है तो बताइए 36 घंटों में वह कितनी दूरी तय करेगा?
8. एक व्यापारी ने 150 टेलीविजन सेट खरीदने के लिए 18,57,750 रुपये का भुगतान किया। बताइए एक टेलीविजन सेट का मूल्य कितना है ?
9. एक विद्यार्थी ने 5068 को 63 के स्थान पर 36 से गुणा कर दिया। बताइए उसका उत्तर सही उत्तर से कितना कम था?
10. अभ्यास पुस्तिकाएँ बनाने के लिए कागज की 75000 शीट उपलब्ध हैं। प्रत्येक शीट से अभ्यास पुस्तिका के 8 पृष्ठ बनते हैं। प्रत्येक अभ्यास पुस्तिका में 200 पृष्ठ हैं। उपलब्ध कागज की शीट से कितनी अभ्यास पुस्तिकाएँ बनाई जा सकती हैं?

www.rajteachers.com

11. एक होटल में 15 लीटर दूध उपलब्ध है। यदि 25 मिली दूध से एक कप चाय बनती है, तो बताइए 15 लीटर दूध से कितने कप चाय बनेगी ?

1.6 अनुमान

मितेश, मनाली, देवांश और चार्वी गिल्ली डंडा का खेल खेल रहे हैं। मितेश और मनाली एक टीम में हैं तथा देवांश और चार्वी दूसरी टीम में हैं। मितेश ने डंडे से गिल्ली को मारा। मितेश और उसके साथी ने गिल्ली और गच्च (गुप्पी) के बीच की दूरी का अंदाजा लगाया।



करो और सीखो

अपनी मुट्ठी में अलग–अलग चीजें (गेहूं, मक्का, सोयाबीन, कंकड़ आदि) लेकर अपने साथी से उसकी संख्या का अंदाजा लगवाएँ। इसे गिनकर देखिए।

कक्षा के बच्चों से चार–चार का समूह बनवाइए और उनके वजन का अनुमान दी गई तालिका में भरवाइए।

क्र.सं.	छात्र/छात्रा का नाम	अनुमानित वजन	वास्तविक वजन
1			
2			
3			
4			

वजन नापने वाली मशीन से बच्चों का वजन कीजिए और बताइए कि

- आप में से कितने बच्चों ने सही–सही वजन बताया?
- कितने बच्चों का अनुमान वास्तविक वजन के करीब है?
- कितने बच्चों का अनुमान वास्तविक वजन से ज्यादा दूर है?

इसी प्रकार अपने साथियों से चर्चा कर अनुमान लगाइए कि

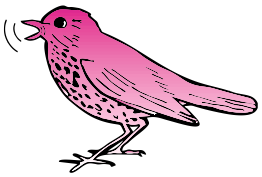
- तुम्हारे घर से विद्यालय की अनुमानित दूरी ..... मीटर/किमी है।
- कक्षा कक्ष की अनुमानित लम्बाई ..... फीट, चौड़ाई ..... फीट है।
- पुस्तकालय में पुस्तकों की अनुमानित संख्या ..... है।

www.rajteachers.com

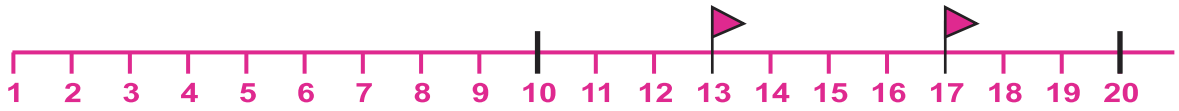
1.7 सन्निकटन

आप अपने घर पर बड़े भाई या बहिन की शादी के कार्यक्रम की कल्पना कीजिए। हम सबसे पहले यह पता लगाएँगे कि हमारे घर पर कितने मेहमान आ सकते हैं। आने वाले मेहमानों की संख्या का पता क्या हम ठीक (Exact) लगा सकते हैं? व्यवहारिक रूप से सम्भव नहीं है।

उन स्थितियों के बारे में सोचिए, जहाँ हम केवल एक सन्निकट आकलित संख्या से काम चलाते हैं और जहाँ हमें ठीक–ठीक संख्या की आवश्यकता पड़ती है।



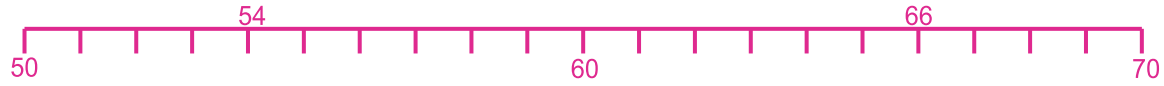
1.7.1 सन्निकटन द्वारा निकटतम दहाई तक आकलन



- कौनसा झंडा 10 के नजदीक है ?
- कौनसा झंडा 20 के नजदीक है ?
- संख्या 13 संख्या 10 और 20 के बीच में है परंतु 13 संख्या 10 के अधिक पास है। इसलिए हम 13 को निकटतम दहाई तक 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।
- सन्निकटन करते हुए हम देखते हैं कि संख्या 1, 2, 3, 4 संख्या 10 की तुलना में संख्या 0 के अधिक पास में है। इसलिए हम इन्हें 0 के रूप में सन्निकटन करते हैं और संख्या 6, 7, 8, 9 संख्या 10 के अधिक पास है इसलिए हम इनका 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।

संख्या 5 संख्या 0 और 10 से बराबर दूरी पर है। सामान्य रूप में संख्या 5 को संख्या 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।

संख्या रेखा पर लिखी संख्या का सन्निकटन कैसे करेंगे?

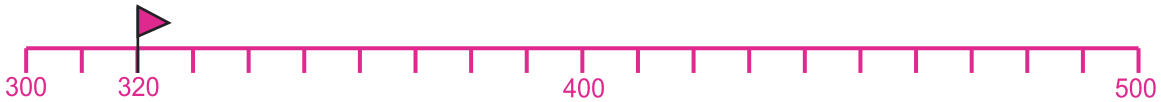




- क्या 278 और 283 दोनों का सन्निकटन 280 होगा। क्यों?

1.7.2 निकटतम सैंकड़े तक सन्निकटन

संख्या रेखा पर झंडे वाली संख्या 320 के बारे में सोचिए। यह किसके नजदीक है ?



संख्या 320 संख्या 300 के नजदीक है। इसलिए संख्या 320 का सैंकड़े तक सन्निकटन 300 के रूप में किया जाता है।

www.rajteachers.com

संख्या 5437 का सन्निकटन दहाई तक करने के लिए हम इसके इकाई वाले स्थान के अंक पर ध्यान देंगे। वह 5 से बड़ा है इसलिए 5437 का दहाई तक सन्निकटन 5440 के रूप में किया जाता है। साथ ही 5437 का सैंकड़े तक सन्निकटन करने के लिए दहाई का अंक देखना होगा। दहाई पर 3 अंक 5 से छोटा है। इसलिए वह 400 के नजदीक है और संख्या 5437 का सन्निकटन 5400 के रूप में किया जाता है।

इन्हें समझें

48 का दहाई तक — 50
682 का सैंकड़े तक — 700
335 का सैंकड़े तक — 300
2907 का सैंकड़े तक — 2900

1.8 कोष्ठक की समझ

जागृति बाज़ार से 5 कॉपियाँ खरीद कर लाई जिसका मूल्य प्रतिकॉपी 10 रुपये था और उसकी सहेली हिमानी उतने ही मूल्य वाली 9 कॉपियाँ लाई। दोनों ने मिलकर कितने रुपये चुकाए ?

जागृति ने बताया	हिमानी ने बताया
= 5 x 10 + 9 x 10	= 5 + 9 x 10
= 50 + 90	= 5 + 90
= 140 रूपये	= 95 रूपये

बताइए किसका हिसाब गलत है ?

अध्यापिका ऐसी उलझन दूर करने के लिए कोष्ठक का प्रयोग किया जाता है। हिमानी ने जो हल किया है उसमें 5 तथा 9 को कोष्ठक में लिख कर एक संख्या बना लेते हैं और फिर बाहर दी गई संक्रियाएँ करते हैं। जैसे–

(5 + 9) = 14
14 x 10 = 140

कोष्ठकों का प्रयोग यह स्पष्ट रूप से बताता है कि पहले कोष्ठक ( ) के अंदर दी गई संख्याओं को हल करते हैं और फिर बाहर वाली संक्रिया करते हैं।

जैसे (5 + 9) x 10
= 14 x 10
= 140

याद रखने योग्य

9 + 1 = 10	10 X 10 = 100
99 + 1 = 100	100 X 10 = 1000
999 + 1 = ...	1000 X 10 = 10,000
9999 + 1 = ...	10,000 X 10 = 1,00,000
99999 + 1 = ...	1,00,000 X 10 = 10,00,000
999999 + 1 = ...	10,00,000 X 10 = 1,00,00,000
9999999 + 1 = 1,00,00,000	

www.rajteachers.com

पैटर्न पहचानो

$0 \times 9 + 1 = 1$
$1 \times 9 + 2 = 11$
$12 \times 9 + 3 = 111$
$123 \times 9 + 4 = 1111$
$1234 \times 9 + 5 =$ .....

.....

.....

$9 \times 9 + 7 = 88$
$98 \times 9 + 6 = 888$
$987 \times 9 + 5 = 8888$
$9876 \times 9 + 4 = 88888$
$98765 \times 9 + .. =$ .....

.....

.....

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक संख्या का सैंकड़े तक सन्निकटन करके हल का सन्निकटित मान बताइए।
   (i) 247 + 691 (ii) 4316 + 1567
   (iii) 7122 − 3565 (iv) 4543 − 2036
2. निम्नलिखित संख्याओं का दहाई तक सन्निकटन करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 34 x 57 (ii) 294 x 72 (iii) 869 x 675
3. विद्यालय के पुस्तकालय में 2541 कहानियों की, 1017 विषयों की और 857 अन्य पुस्तकें हैं। विद्यालय में लगभग कितनी पुस्तकें हैं। (सैंकड़े तक सन्निकट मान बताइए)
4. एक गाँव में 8596 गायें और 7015 भैंसें हैं तो इस गाँव में कौनसे पशु अधिक हैं और लगभग कितने अधिक हैं? (सैंकड़े तक सन्निकट मान बताइए।)
5. एक कार एक लीटर पेट्रोल में 15 किलोमीटर दूरी तय करती है तो 100 किलोमीटर जाने में लगभग कितना पेट्रोल चाहिए। (सैंकड़े तक सन्निकट मान बताइए।)

हमने सीखा

1. दो संख्याओं में वही संख्या बड़ी होती है जिसमें अंकों की संख्या अधिक होती है। यदि अंकों की संख्या समान है तब हम उनके सबसे बाएँ स्थित अंकों की तुलना करते हैं और जिस संख्या में यह अंक बड़ा होगा वही संख्या बड़ी होगी। अगर यह अंक भी समान है, तब हम इसी प्रकार बाईं से दाईं तरफ अंकों की तुलना करते जाते हैं।
2. अंकों से संख्या बनाते समय सबसे बड़ी संख्या के लिए बाएँ से बड़े से छोटे एवं सबसे छोटी संख्या के लिए अंक बाएँ से छोटे से बड़े क्रम में लिखते हैं ।
3. चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 हैं एवं पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या 10000 होती है।
4. संख्याओं को लिखने तथा पढ़ने में अल्पविरामों का प्रयोग सहायता करता है। भारतीय संख्यांकन पद्धति में पहला अल्पविराम दाईं ओर से प्रारम्भ कर तीन अंकों बाद व उसके बाद दो–दो अंकों बाद लगाए जाते हैं। अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में अल्पविराम दाईं ओर से प्रारम्भ कर तीन–तीन अंकों बाद लगाए जाते हैं।
5. अनेक स्थितियों में हमें सही–सही संख्याओं की आवश्यकता नहीं होती है बल्कि एक उपयुक्त आकलन से ही काम चल सकता है।
6. अनेक स्थितियों में हमें संख्याओं पर संक्रियाओं के फलस्वरूप प्राप्त परिणामों का भी आकलन उपयोगी सिद्ध होता है ऐसे आकलनों में हम पहले प्रयोग होने वाली संख्याओं को सन्निकटित कर शीघ्रता से परिणाम प्राप्त कर लेते हैं।

www.rajteachers.com

अध्याय 2

रिश्ते संख्याओं के

2.1 रिमझिम और मुकुल पिछली कक्षाओं में सीखे गुणनखंड का अभ्यास कर रहे हैं। रिमझिम ने 16 के गुणनखंड 2, 4, 6 व 8 बताए।

मुकुल – रिमझिम तुम 6 को 16 का गुणनखंड कैसे कह रही हो?
क्या तुम 16 को 6–6 के समूह में बाँट सकती हो?

रिमझिम– मैं करके देखती हूँ।

* * * * * *
* * * * * *
* * * *

अरे, दो बार तो 6–6 का समूह बन गया पर तीसरी बार में 2 कम रह गए।

मुकुल – इसका अर्थ हुआ कि 6, 16 का गुणनखण्ड नहीं है। क्योंकि 16 को 6–6 के समूह में पूरा नहीं बाँटा जा सकता है।

रिमझिम– बराबर–बराबर बाँटने का मतलब तो भाग करना भी होता है, तो क्या हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनका पूरा–पूरा भाग 16 में जाए वे 16 का गुणनखंड होंगी ?

2.2 गुणनखण्ड एवं गुणज

रिमझिम वे संख्याएँ ज्ञात करना चाहती है जो 8 को पूरा–पूरा विभाजित करती है। वह 8 को 8 व उससे छोटी संख्याओं से इस प्रकार विभाजित करती हैं

1) 8 (8 - 8 ——— 0 ——— भागफल 8 है शेषफल 0 है।	2) 8 (4 - 8 ——— 0 ——— भागफल 4 है शेषफल 0 है।	3) 8 (2 - 6 ——— 2 ——— भागफल 2 है शेषफल 2 है।	4) 8 (2 - 8 ——— 0 ——— भागफल 2 है शेषफल 0 है।
5) 8 (1 - 5 ——— 3 ——— भागफल 1 है शेषफल 3 है।	6) 8 (1 - 6 ——— 2 ——— भागफल 1 है शेषफल 2 है।	7) 8 (1 - 7 ——— 1 ——— भागफल 1 है शेषफल 1 है।	8) 8 (1 - 8 ——— 0 ——— भागफल 1 है शेषफल 0 है।

www.rajteachers.com

रिमझिम – 1, 2, 4 व 8 ऐसी संख्याएँ हैं जिनका पूरा–पूरा भाग 8 में जाता है। अतः 1, 2, 4 व 8 संख्या 8 के गुणनखण्ड हैं। अतः 8 को 1 x 8, 2 x 4 के रूप में लिख सकते हैं **गुणनखंड को हम अपवर्तक भी कहते हैं।**

मुकुल – रिमझिम इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि 1, 2, 4 व 8 का एक गुणज 8 है (अतः 1, 2, 4 व 8 के पहाड़ों में 8 आता है।)

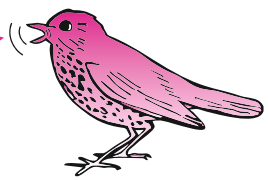
करो और सीखो

नीचे दी गई तालिका में संख्याओं के सामने इनके गुणनखंड लिखिए।

संख्या	गुणनखंड
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
24	.....
27	.....
17	.....
15	.....
7	.....

ऊपर दी गई तालिका से क्या आप कह सकते हैं कि 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है?

.....



2.3 भाज्य और अभाज्य संख्याएँ

नीचे दी गई संख्याओं के गुणनखण्डों को देखिए।

संख्या	गुणनखण्ड	गुणनखण्डों की संख्या
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	2
8	1,2,4,8	4

तालिका 2.1

www.rajteachers.com

तालिका में 1 ही केवल ऐसी संख्या है जिसके गुणनखण्डों की संख्या 1 है, इसलिए ये न तो भाज्य है न ही अभाज्य।

तालिका को देखकर बताइए , वे कौन–कौन सी संख्याएँ हैं जिनके केवल दो गुणनखण्ड हैं ? .....

ऐसी संख्याएँ जिनके दो ही गुणनखण्ड होते हैं (1 तथा स्वयं वह संख्या) उन्हें **अभाज्य संख्या** कहते हैं, जैसे 2, 3, 5, 7 आदि।

दो से अधिक गुणनखण्डों वाली संख्याएँ **भाज्य अथवा संयुक्त संख्याएँ** कहलाती हैं, जैसे 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

संख्या खेल– आओ हम एक ऐसा खेल खेलते हैं जिसकी सहायता से हम बिना गुणनखण्ड किए भी बता सकते हैं कि संख्या भाज्य या अभाज्य है। सबसे पहले 1 से 100 तक की संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण 1 संख्या 1 पर सबसे पहले बॉक्स ☐ बनाएँ क्योंकि यह ना तो भाज्य संख्या है और ना ही अभाज्य संख्या है।

चरण 2 संख्या 2 पर घेरा लगाइए और 2 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों जैसे 4, 6 व 8 इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 3 अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर घेरा लगाइए और 3 के शेष सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण 4 इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक की दी गई सभी संख्याओं पर या तो घेरा ना लग जाए या वे कट ना जाएँ। घेरा लगी सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं।

इस खेल के बाद बताइए कि 1 से 100 के बीच आपको कितनी अभाज्य संख्याएँ प्राप्त होती हैं? इन अभाज्य संख्याओं को क्रमबद्ध लिखिए और अपने दोस्तों से इनका मिलान भी कीजिए।

2.4 सम–विषम संख्याएँ

कनक और प्रीतम कंचे से खेल रहे थे।

कनक– देखो प्रीतम, मैं तुम्हें एक खेल सिखाती हूँ। कुछ कंचे मुट्ठी में लेकर आपस में मिलाकर एक मुट्ठी में जितने चाहो उतने ले कर अपनी मुट्ठी बंद कर लो। अब मुझे बताना है कि तुम्हारी मुट्ठी में कंचे जोड़ों में हैं या नहीं। इस खेल को एकी या बेकी भी कहते हैं।

एकी मतलब जितने, कंचे मुट्ठी में हैं उनके दो–दो के समूह बनाना और यदि कोई कंचा अकेला बच जाए तो हुआ एकी और यदि सभी कंचों के दो–दो के जोड़े बन जाए तो वह हुआ बेकी। कनक व प्रीतम ने इस खेल को खेला और इसे तालिका में लिखा।

आप भी यह खेल अपने दोस्तों के साथ खेलिए और तय कीजिए कि किन–किन संख्याओं को एकी कहा जाए और किन संख्याओं को बेकी कहा जाए ?

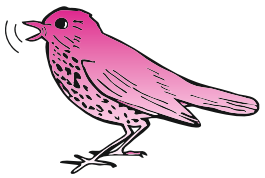
www.rajteachers.com

क्या आप कोई नियम बना पाए ? इकाई के स्थान पर 2, 4, 6, 8, 0 होने पर संख्याएँ सम संख्याएँ कहलाती हैं। 1, 3, 5, 7, 9 इकाई स्थान पर हो तो वे संख्याएँ विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

स्कोर कार्ड			
कनक		प्रीतम	
15	कंचे	बेकी	गलत
19	कंचे	एकी	सही
24	कंचे	बेकी	सही
.....		.....	.....

तालिका 2.2

ऐसी सभी संख्याएँ जिनमें 2 का पूरा–पूरा भाग जाए या वे 2 का गुणज हो सम संख्याएँ कहलाती हैं।



करो और सीखो

सम व विषम संख्याओं को अलग–अलग लिखिए।

(i) 357 (ii) 436 (iii) 77 (iv) 1900 (v) 5001

सम संख्याएँ.....विषम संख्याएँ.....

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के सभी गुणनखण्ड लिखिए।
   (i) 48 (ii) 36 (iii) 28 (iv) 100 (v) 125
2. निम्नलिखित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए।
   (i) 7 (ii) 12 (iii) 17 (iv) 15 (v) 18
3. 10 से 30 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं को लिखिए।
4. सबसे छोटी अभाज्य संख्या लिखिए।
5. निम्नलिखित में से कौनसी संख्याओं का 6 एक गुणनखण्ड है?
   6, 10, 12, 15, 18, 25, 30, 38, 46
6. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जो 4 व 6 दोनों की गुणज हो।
7. सत्य या असत्य बताइए।
   (i) 108, 9 का एक गुणज है।
   (ii) 7, 27 का एक गुणनखण्ड है।
   (iii) दो अभाज्य संख्याओं का योग एक सम संख्या होता है।
   (iv) प्रत्येक अभाज्य संख्या विषम होती है।
   (v) 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।
   (vi) प्रत्येक संख्या का गुणज उससे छोटा होता है।
   (vii) प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड उससे छोटा होता है।

www.rajteachers.com

2.5 विभाज्यता के नियम

2.5.1 इकाई स्थान के अंक के आधार पर

(i) 2 से विभाज्यता

हमने अभी सम एवं विषम संख्याओं के बारे में सीखा है अब आप बताइए क्या हम कह सकते हैं कि सभी सम संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं? कुछ सम व विषम संख्याएँ लीजिए जैसे 24, 15, 48, 26, 13, 11 और उनके गुणनखण्ड कीजिए।

24 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

15 के गुणनखण्ड 1, 3, 5, 15

इसी प्रकार आप संख्याओं 26, 48, 13, 11 के गुणनखण्ड कीजिए।

2 जिन संख्याओं का एक गुणनखण्ड है उनके इकाई स्थान पर कौनसा अंक है ? लिखिए .....

संख्याएँ		संख्याएँ	
सम	2 से भाज्य	विषम	2 से भाज्य
22	हाँ	11	नहीं
28		51	
50		57	
36		23	
——		——	
——		——	

तालिका 2.3

अतः हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई स्थान पर 0, 2, 4, 6, 8 आता है वे संख्याएँ 2 से विभाज्य होती हैं और 2 उनका एक गुणनखण्ड भी होता है।

(ii) 10 से विभाज्यता

संख्याएँ	10 से भाज्य हाँ/नहीं
20	
22	
120	
50	
17	
19	

तालिका 2.4

तालिका में आप कुछ और संख्याएँ भरिए। 10 से भाज्य संख्याओं के इकाई स्थान वाले अंक को देखने पर क्या आपको कोई पैटर्न मिलता है?

वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर शून्य आता है या जिनका एक गुणनखण्ड 10 होता है वे 10 से पूर्णतः विभाजित होती हैं।

www.rajteachers.com

(iii) 5 से विभाज्यता

दी गई संख्याओं के सभी गुणनखण्ड लिखिए।

संख्याएँ	गुणनखण्ड
45	1,3,5,9,45
40	1,2,4,5,8,10,20,40
32	.....
18	.....
25	.....

अब उन सभी संख्याओं के इकाई अंकों को देखिए जिनका एक गुणनखण्ड 5 है।

अतः हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर 0 अथवा 5 आता है वे संख्याएँ 5 से विभाज्य होती हैं।

करो और सीखो

1. क्या जिन संख्याओं में इकाई का अंक 5 या 0 होता है, उन सभी संख्याओं का एक गुणनखण्ड 5 होगा?
2. क्या वे सभी संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी?
3. क्या ऐसी कोई संख्या जिसका इकाई का अंक 5 या 0 ना हो, उसका एक गुणनखण्ड 5 हो सकता है?

2.5.2 अंकों के योग के आधार पर

(i) 3 की विभाज्यता का नियम

कक्षा में शिक्षक एक खेल खिलाएगा ।

1. कोई एक संख्या सोचिए।
2. उस संख्या के अंकों का योग कीजिए।
3. अंकों के योग में 3 का भाग दीजिए।
4. क्या भाग पूरी–पूरी बार गया?
5. मूल संख्या में 3 का भाग दीजिए।
6. क्या भाग पूरी–पूरी बार गया?

विद्यार्थियों से प्राप्त परिणामों को शिक्षक श्यामपट्ट पर समेकित करेंगे।

संख्याएँ	अंकों का योग	3 से विभाज्य
39	3 + 9 = 12 ; 1 + 2 = 3	हाँ
109	1 + 0 + 9 = 10 ; 1 + 0 = 1	नहीं
507		
1008		
.....		

तालिका 2.5

www.rajteachers.com

ऊपर दी गई तालिका को पूरा कीजिए–

रीना ने 321 में इस नियम से 3 की विभाज्यता को जाँचा

321 में संख्यांकों का योग = 3 + 2 + 1 = 6

6, 3 से विभाजित है।

```
3) 321 ( 107
 - 3
  021
  - 21
   00
```

अतः हम कह सकते हैं कि यदि किसी संख्या के सभी अंकों का योगफल 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या भी 3 से भाज्य होगी।

(ii) 9 की विभाज्यता का नियम

संख्या	अंकों का योग	संख्या 9 से भाज्य
1827	1 + 8 + 2 + 7 = 18	हाँ
1227		
3395		
145		
.....		

तालिका 2.6

तालिका को पूरा कीजिए, क्या आप इससे 9 की विभाज्यता के लिए कोई पैटर्न बता सकते हैं?

यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य है तो वह संख्या भी 9 से भाज्य होगी।

करो और सीखो

3672 में अंकों का योग 3 + 6 + 7 + 2 = 18

क्या यह 9 से भाज्य है ? 3672 ÷ 9 करके देखिए।

(iii) 6 की विभाज्यता का नियम

संख्या 216 पर 2 व 3 की विभाज्यता को जाँचिए।

संख्या	2 से भाज्य	3 से भाज्य	6 से भाज्य
216	हाँ	हाँ	हाँ
58	हाँ	नहीं	नहीं
108			
103			
.....			

तालिका 2.7

www.rajteachers.com

आप कुछ और संख्याएँ तालिका में लिखिए और तालिका को पूरा कीजिए। क्या आपको 6 से विभाज्यता के लिए कोई पैटर्न दिखाई देता है?

यदि कोई संख्या 2 तथा 3 से अलग–अलग विभाजित होती है तो वह 6 से भी विभाज्य होगी।

करो और सीखो

दी गई संख्याओं 336, 123, 1002, 4236 की 6 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

(iv) 4 से विभाज्यता का नियम

जब किसी संख्या के दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य होती है अथवा उस संख्या में दहाई व इकाई के स्थान पर 0 हो तो वह संख्या 4 से विभाजित होती है।

आप कुछ संख्याएँ लेकर इस पैटर्न को जाँचिए।

मीना ने एक संख्या 9212 ली तब इसके दहाई व इकाई स्थान के अंकों से बनी संख्या 12 है जो 4 से भाज्य है। आप इसे भाग करके देखिए।

(v) 8 की विभाज्यता का नियम

यदि किसी संख्या के सैंकड़ा, दहाई, इकाई वाले तीन अंकों की संख्या 8 से विभाजित हो या सैंकड़ा दहाई व इकाई के स्थान पर शून्य हो तो वह संख्या 8 से विभाजित होगी।

इस पैटर्न को तालिका में जाँचिए।

संख्याएँ	सैंकड़ा, दहाई व इकाई अंक से बनी संख्या	8 से भाज्य हाँ/नहीं
1. 30480	480 ÷ 8 = 60	हाँ
2. 42108	108 ÷ 8 = ...	.....
3. 1324	324 ÷ 8 = ...	.....
4.	..... = ...	.....
5	..... = ...	.....

तालिका 2.8

(vi) 11 की विभाज्यता का नियम

क्या संख्या 72325, 11 से विभाज्य है? 72325 में विषम स्थान के अंक 7, 3, 5 है।

इन अंकों का योग = 7 + 3 + 5 = 15

इसी प्रकार सम स्थान के अंकों का योग = 2 + 2 = 4

(विषम स्थान के अंकों का योग) - (सम स्थान के अंको का योग) = 15 - 4 = 11, जो 11 से विभाज्य है।

अतः संख्या 72325 भी 11 से भाज्य है।

इसी प्रकार आप भी तालिका को भरिए और पता लगाइए कौन–कौन सी संख्याएँ 11 से विभाज्य है?

```
11) 72325 ( 6575
  - 66
   63
  - 55
    82
  - 77
    55
  - 55
    0
```


www.rajteachers.com

क्र.सं.	संख्याएँ	सम स्थान के अंकों का योग	विषम स्थान के अंकों का योग	अन्तर 11 से भाज्य है / नहीं
1	3333			
2	15708			
3	12345			
4	130303			

तालिका 2.9

क्या ऊपर दी गई तालिका से आप 11 की विभाज्यता के लिए कोई नियम बना सकते हैं ?

वे सभी संख्याएँ जिनके सम तथा विषम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 0 या 11 के गुणज हो, 11 से विभाज्य होती है।

2.6 सार्व गुणज एवं अभाज्य गुणनखण्ड

सार्वगुणज

3 व 4 के गुणज क्या हैं?

3 के गुणज = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24---- (कुछ और गुणज लिखिए)

4 के गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36..... (कुछ और गुणज लिखिए)

अब 3 व 4 के समान गुणजों पर गोला बनाइए।

12, 24, 36....ऐसी संख्याएँ हैं जो 3 व 4 दोनों की गुणज हैं, इन्हें हम 3 व 4 का सार्व गुणज कहते हैं।

अभाज्य गुणनखण्ड

हम संख्याओं के गुणनखण्ड करना सीख चुके हैं। यहाँ हम संख्या 18 के गुणनखण्ड पर विचार करते है–

$18 = 2 \times 9$ $18 = 3 \times 6$

$= 2 \times 3 \times 3$ $= 3 \times 2 \times 3$

हमे देखते हैं कि संख्या 18 के उपर्युक्त दोनों प्रकार से किए गुणनखण्डों के अंत में प्राप्त गुणनखण्ड अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या के इस प्रकार के गुणनखण्ड अभाज्य गुणनखण्ड कहलाते हैं।

किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड निम्न प्रकार भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 28 (ii) 54 (iii) 96 (iv) 148 (v) 156
2. 4 अंकों की सबसे छोटी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड लिखिए।
3. निम्न के सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 24, 36 (ii) 35, 40 (iii) 12,18, 30 (iv) 14, 25, 35
4. निम्न के प्रथम तीन सार्वगुणज ज्ञात कीजिए।
   (i) 4 और 5 (ii) 8 व 12 (iii) 2, 4,10 (iv) 3, 9,15
5. 50 से छोटी ऐसी सभी संख्याएँ लिखिए जो 2 व 3 की सार्वगुणज है।

www.rajteachers.com

2.7 महत्तम समापवर्तक

2.7.1 अभाज्य गुणनखण्ड विधि से

हमने गुणनखण्ड के बारे में सीखा है चलो गुणनखण्डों की विशेषताओं के बारे में जानकारी करते हैं।

30, 36 व 42 के सर्वसंभव गुणनखण्ड होंगे।

30 =	1	2	3	5	6	10	15	30	
36 =	1	2	3	4	6	9	12	18	36
42 =	1	2	3	6	7	14	21	42	

अतः हम देखते हैं 1, 2 ,3 व 6 संख्या 30, 36 व 42 के समान गुणनखण्ड हैं। इनमें भी 6 वह सबसे बड़ी संख्या है जिससे संख्याएँ 30, 36, 42 तीनों विभाज्य है। ऐसी संख्या को महत्तम समापवर्तक कहते हैं। आओ इसके दैनिक जीवन में उपयोग के उदाहरणों को समझते हैं।

उदाहरण 1 आशा, निशा और श्याम के पास क्रमशः 14 मी., 35 मी. व 21 मी. लम्बे रिबन के रोल हैं तीनों रिबन को बड़े से बड़े समान टुकड़ों में इस प्रकार काटना चाहते हैं कि काटने के पश्चात् रिबन शेष न रहे। तो वह समान रूप से कितने–कितने मीटर के टुकड़े काटेंगे?

हल आशा, निशा व श्याम क्रमशः रिबन के निम्न मापों के टुकड़े काट सकते हैं।

14	=	1	2	7	14
35	=	1	5	7	35
21	=	1	3	7	21

14, 35 व 21 का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ (समान) गुणनखण्ड 7 है अतः 7 मी. वह बड़ी से बड़ी माप है जिसमें हम 14 मी., 35 मी. व 21 मी. के बराबर माप के रिबन काट सकते हैं। यह महत्तम समापवर्तक भी है।

उदाहरण 2 संख्या 24, 36 व 60 का महत्तम समापवर्तक अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए।

हल 24, 36 और 60 का म.स. इन संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है –

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

24	=	2	x	2	x	2	x	3
36	=	2	x	2	x	3	x	3
60	=	2	x	2	x	3	x	5

24, 36 व 60 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 2 x 2 x 3

अतः 24, 36 और 60 का म.स. 2 x 2 x 3 = 12

www.rajteachers.com

करो और सीखो

राजू की गाय 15 लीटर तथा भैंस 20 लीटर दूध देती है उस बर्तन का अधिकतम माप क्या होगा जो गाय व भैंस के दूध को पूरा–पूरा माप सके?

2.7.2 वैदिक विधि से

वैदिक गणित में सूत्र (संकलन– व्यवकलन) से भी म.स. ज्ञात किया जा सकता है, आओ प्रयास करें।

उदाहरण 3 संख्या 24 व 36 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल संख्याओं का प्रथम अंतर = 36 - 24 = 12

अतः संभावित म.स. = 12

दूसरा अंतर 24 - 12 = 12, प्रथम अंतर = दूसरा अंतर है। अतः 24 व 36 का म.स. = 12

उदाहरण 4 संख्या 145 व 232 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल प्रथम अंतर 232 - 145 = 87 अतः संभावित म.स. 87

दूसरा अंतर 145 - 87 = 58 अतः संभावित म.स 58

तीसरा अंतर 87 - 58 = 29 अतः संभावित म.स 29

चौथा अंतर 58 - 29 = 29 अतः म.स. 29

145 व 232 का म.स. = 29

उदाहरण 5 संख्या 18, 54, 81 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल दो संख्या का संकलन 18 + 81 = 99

प्रथम अंतर 18 + 81 - 54 = 45 अतः संभावित म.स. 45

दूसरा अंतर 54 - 45 = 9 अतः संभावित म.स. 9

संभावित म.स. 9, 45 का गुणज है।

अतः 18, 54, 81 का म.स. = 9

करो और सीखो

वैदिक विधि से म.स. ज्ञात कीजिए।

(i) 8,12 (ii) 38, 57 (iii) 117, 195 (iv) 99, 165, 231

प्रश्नावली 2.3

1. निम्न संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
   (i) 36, 84 (ii) 28, 42 (iii) 13, 26, 52
   (iv) 15, 35, 40 (v) 23, 31, 93
2. निम्न का म.स. क्या है ?
   (i) दो क्रमागत संख्याएँ (ii) दो क्रमागत सम संख्याएँ (iii) दो क्रमागत विषम संख्याएँ

www.rajteachers.com

3. एक फर्श की चौड़ाई 25 मी. और लम्बाई 30 मी. है। ऐसी सबसे लम्बी रस्सी की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो कमरे की लम्बाई और चौड़ाई को पूरा–पूरा नाप ले।

4. तीन टैंकरों में क्रमश : 96 ली, 100 ली और 144 ली तेल आता है उस बर्तन का अधिकतम माप क्यो होगा जो तीनों टैंकरों के तेल को पूरा–पूरा माप देगा ?

5. 36 मीटर, 54 मीटर और 90 मीटर की दूरियों को नापने के लिए बड़ी से बड़ी किस लम्बाई की रस्सी की आवश्यकता होगी ?

2.8 लघुत्तम समापवर्त्य

अध्यापक कक्षा में बच्चों से एक पहेली पूछते हैं।

''चार–चार या पाँच–पाँच की बनाऊँ ढ़ेरियाँ।
दोनों बार पूरी–पूरी बँटे कम से कम कितनी बेरियाँ।''

लीला – इसका मतलब ये हुआ कि हर ढ़ेरी में बेर समान हो तथा दोनों ढ़ेरियाँ पूरी–पूरी बँटनी चाहिए न बचे न घटे।

अध्यापक – हाँ, अब ये बताओ कि हर ढ़ेरी में कम से कम कितने बेर होंगे ?

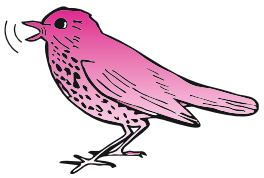


कमल – अगर बेर 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 आदि संख्याओं में हो तो उन्हें चार–चार की ढ़ेरियों में बाँटा जा सकता हैं।



लीला – अगर बेर 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 45 आदि संख्याओं में हो तो पाँच–पाँच की ढ़ेरियों में पूरा–पूरा बाँट सकते है।

वह छोटी से छोटी संख्या जो दो या दो से अधिक संख्याओं से पूरी–पूरी विभाजित हो जाती है उन संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य कहलाती है।



करो और सीखो

दो घंटियाँ एक साथ बजना प्रारंभ करती है। पहली घंटी हर 3 मिनिट बाद तथा दूसरी घंटी हर 5 मिनिट बाद पुनः बजती है तो दोनों घंटियाँ कितने समय पश्चात् फिर से एक साथ बजेगी?

www.rajteachers.com

2.8.1 लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ

1. अभाज्य गुणनखण्ड विधि

48 और 30 का ल.स. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

48 = 2x2x2x2x3
30 = 2x3x5

2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	30
3	15
5	5
	1

चरण 2 : इन अभाज्य गुणनखण्ड़ों में, अभाज्य गुणनखण्ड 2 अधिकतम 4 बार आता है। (यह 48 में है) और 3 तथा 5 अधिकतम 1–1 बार ही आते है।

अतः अभीष्ट ल.स. = 2x2x2x2x3x5 = 240 होगा।

2. भाग विधि

18, 24 और 30 का ल.स. भाग विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार पंक्ति में लिखते हैं।

2	18, 24, 30
2	9, 12, 15
2	9, 6, 15
3	9, 3, 15
3	3, 1, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

चरण 2 : छोटी से छोटी संख्याओं से भाग देते हैं। जो संख्याएँ विभाजित नहीं होती हैं उन्हें अगली पंक्ति में वैसा का वैसा ही लिखते हैं।

चरण 3 : इसे तब तक जारी रखते हैं, जब तक संख्या विभाजित होती रहे। फिर अगली अभाज्य संख्या से विभाजन की प्रक्रिया दोहराते हैं, जब तक सभी संख्याएँ पूरी तरह से विभाजित ना हो जाए।

चरण 4 : हर पंक्ति की भाजक संख्याओं का गुणा ल.स. होता है।

अतः 18, 24, 30 का ल.स. 2x2x2x3x3x5 = 360

3. वैदिक विधि

संख्या 12 व 16 का ल.स. वैदिक विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : 12 व 16 को भिन्न रूप में $\frac{12}{16}$ लिखते हैं। (सूत्र आनुरूप्येण)

चरण 2 : 12 व 16 के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं। $\frac{12}{16} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$

चरण 3 : जो संख्या अंश व हर में उभयनिष्ठ है उन्हें हटा देते हैं। $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

चरण 4 : उर्ध्वतिर्यक गुणा विधि से 12x4 = 16x3 = 48 प्राप्त हुआ।

अतः 12 व 16 का ल.स. 48 है।

www.rajteachers.com

करो और सीखो

1. संख्या 48, 64 व 80 का लघुत्तम समापवर्त्य भाग विधि से ज्ञात कीजिए।
2. संख्या 24, 30 का लघुत्तम समापवर्त्य वैदिक विधि से ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 2.4

1. निम्नलिखित का ल.स. ज्ञात कीजिए।
   (i) 10, 15
   (ii) 14, 28
   (iii) 12, 18 और 27
   (iv) 48, 56 और 72
2. न्यूनतम कितने आमों को 5-5 और 6-6 के समूहों में पूरा–पूरा बाँटा जा सकता है?
3. स्नेहा और वंश क्रमशः प्रत्येक तीसरे व पाँचवे दिन बाजार जाते हैं। आज दोनों बाजार गए थे। कितने दिन बाद वे फिर से एक साथ बाजार जाएँगे?
4. हरीश, सलीम और राकेश किसी मैदान का पूरा चक्कर लगाने में क्रमश : 6, 8 और 12 मिनट लगाते है। तीनों 6 बजे साथ दौड़ना आरंभ करे तो कितने समय बाद तीनों एक साथ होंगे?
5. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 16, 20 व 24 से पूरी–पूरी विभाजित हो।
6. एक नीला बल्ब प्रत्येक 60 सेकण्ड में जलता व बुझता है तथा एक लाल बल्ब प्रत्येक 90 सेकण्ड में जलता व बुझता है। यदि दोनों बल्ब 5 बजे एक साथ जलते हैं तो कितनी बजे पुनः एक साथ जलेंगे?

हमने सीखा

1. (i) एक संख्या का गुणनखण्ड उस संख्या का पूर्ण विभाजक होता है।
   (ii) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणनखण्ड होती है। 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।
   (iii) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणनखण्ड उस संख्या से छोटा या बराबर होता है।
   (iv) प्रत्येक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखण्डों का एक गुणज होती है।
   (v) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।
   (vi) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है।
2. (i) वह संख्या जिसके दो ही गुणनखण्ड होते हैं (संख्या स्वयं और 1) अभाज्य संख्या कहलाती है। जिन संख्याओं के दो से अधिक गुणनखण्ड होते है, वे संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

www.rajteachers.com

(ii) संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो एक सम संख्या भी है। अन्य सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।

3. संख्याओं को बिना भाग की क्रिया किए उनकी संख्या 2, 3,4, 5, 8, 9, 10 और 11 से विभाज्यता की जाँच कर सकते है। हमने संख्या के अंकों का विभिन्न संख्याओं से विभाज्यता के संबंधों का अध्ययन किया है।

(i) 2, 5 और 10 से विभाज्यता केवल इकाई के अंक को देखकर बताई जा सकती है।

(ii) 3 और 9 से विभाज्यता संख्या के अंकों के योग द्वारा बताई जा सकती है।

(iii) 4 से विभाज्यता इकाई और दहाई तथा 8 से विभाज्यता इकाई, दहाई व सैंकड़े से बनने वाली संख्या द्वारा जाँची जा सकती है।

(iv) 11 से विभाज्यता दाईं ओर से सम स्थानों के अंकों के योग और विषम स्थानों के अंकों के योग के अंतर द्वारा जाँची जा सकती है।

4. यदि दो संख्याएँ एक संख्या से विभाजित होती है तो उन दोनों का योग तथा अंतर भी उस संख्या से विभाजित होता है।

5. दो या अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) उसके सार्वगुणनखंडों में से सबसे बड़ा होगा।

6. दो या अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) उसके सार्वगुणजों में से सबसे छोटा होगा। वैदिक गणित के माध्यम से भी संख्याओं का ल.स. (LCM) एवं म.स. (HCF) ज्ञात किया जा सकता है।

www.rajteachers.com

अध्याय 3

पूर्ण संख्याएँ

3.1 हम दैनिक जीवन में रोज कई वस्तुओं को गिनते हैं जैसे आपके 3 दोस्त हैं, खेत में 6 गायें चर रही है आपकी कक्षा में 25 बच्चे हैं आदि।

मनुष्य ने गणना का कार्य हजारों वर्ष पूर्व ही करना प्रारम्भ कर दिया था। हम गणना सदैव संख्या 1 से शुरू करते हैं। अधिक से अधिक हम कहाँ तक गिन सकते हैं?

रमेश ने कहा 100 तक।

सीमा : क्यों 100 के बाद 101 भी तो होता है।

(रमेश ने मन ही मन आगे गिनना शुरू किया तब उसे महसूस हुआ कि 100 के बाद 200, 300 .... आएँगे)

तब उसने कहा 1000 तक।

सीमा : परन्तु उसके आगे 2000, 3000, 4000 ..... आते हैं।

(रमेश फिर आगे गिनना प्रारम्भ कर सबसे बड़ी संख्या सोचता है परन्तु उत्तर ना पाकर परेशान हो जाता है)

रमेश : अब तुम ही बता दो कहाँ तक गिन सकते हैं?

सीमा: मैं भी सोच रही हूँ परन्तु अन्तिम संख्या क्या होगी यह तो मुझे भी नहीं पता।

हम संख्या 1 से गिनना प्रारम्भ करते हैं। इस प्रकार 1 प्रथम प्राकृत संख्या है अगली प्राकृत संख्या 2 है जो प्रथम संख्या में 1 जोड़ने पर प्राप्त होती है। 2 में 1 जोड़ने पर 3, अर्थात् तीसरी प्राकृत संख्या प्राप्त होती है। वस्तुतः किसी भी प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर अगली प्राकृत संख्या प्राप्त होती है जिसे हम उस संख्या की उत्तरवर्ती या परवर्ती संख्या कह सकते हैं। इस प्रकार $99 + 1 = 100$ जो कि 99 की उत्तरवर्त्ती या परवर्त्ती संख्या है। यानि प्राकृत संख्याओं का समूह ऐसी संख्याओं का समूह है जो क्रम से एक–एक करके बढ़ता जाता है।

यदि आपसे यह पूछा जाए कि प्राकृत संख्याएँ कितनी है तो आप सोच में पड़ जाएँगे। क्या आप प्राकृत संख्याओं को गिनकर बता सकते हैं कि ये कितनी हैं? शायद नहीं।

यदि हम 1, 2, 3 .....100, 101 ..... 999... 1001 गिनना प्रारंभ करें और गिनते चले जाएँ तो क्या इसका कहीं अन्त होगा? नहीं प्राकृत संख्याएँ अनन्त हैं। जिसे संख्याओं के आगे तीन बिन्दु लगाकर प्रदर्शित करते हैं 1, 2, 3... प्राकृत संख्याओं के समूह को N से प्रदर्शित करते हैं।

अतः $N = \{1, 2, 3, ...\}$

3.1.1 प्राकृत संख्याओं के गुण

1. सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है।
2. प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर अगली प्राकृत संख्या प्राप्त होती है जैसे $18 + 1 = 19$
3. 1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृत संख्या में से यदि 1 घटाएँ तो पिछली संख्या (पूर्ववर्ती) प्राप्त होती है, जैसे $18 - 1 = 17$
4. प्राकृत संख्याएँ अनन्त हैं, अतः सबसे बड़ी प्राकृत संख्या नहीं लिखी जा सकती।

www.rajteachers.com

5. सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 में से 1 घटाने पर प्राकृत संख्या प्राप्त नहीं होती अर्थात् शून्य (0) प्राकृत संख्या नहीं है।

3.2 पूर्ण संख्याएँ

निम्न सारणी में खाली स्थान में उपयुक्त संख्या भरिए।

पूर्ववर्ती प्राकृत संख्या	प्राकृत संख्या	अग्र (परवर्ती प्राकृत संख्या)
13–1 = 12	13	13 + 1 = 14
	55	–
99	100	101
–	200	–
–	10	11
–	1	

तालिका 3.1

कौन सी संख्या की कोई प्राकृत पूर्ववर्ती संख्या नहीं है?

संख्या 1 की कोई प्राकृत पूर्ववर्ती नहीं है। हम 1 की पूर्ववर्ती संख्या के रूप में शून्य (0) को लेते हैं इसे प्राकृत संख्या के समूह में जोड़ लेते हैं तो यह नया समूह बनता है

(0,1,2,3,...)

इसे पूर्ण संख्याओं का समूह कहते हैं इसे **W** से व्यक्त किया जाता है अतः

W = {0,1,2,3,...}

आपके पिताजी 6 केले लेकर आए। आपके घर में 6 सदस्य हैं। सभी ने एक–एक केला खा लिया अब आपके पास कितने केले बचे ?
आप कहेंगे– कुछ नहीं।
पाँच चिड़िया पेड़ पर बैठी थी। एक–एक करके सब उड़ गई, तो बताओ कितनी बची ? आप कहेंगे– कुछ नहीं।
विचार कीजिए और बताइए
6–6 = –– या 5–5=–– या 10–10=––
क्या होगा ?

3.2.1 पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना

पूर्ण संख्याओं को एक संख्या रेखा पर दिखाने के लिए अपनी उत्तर पुस्तिका में एक सरल रेखा खींचिए जिसमें समान दूरी पर कई चिह्न लगे हों।



इसमें प्रारंभिक बिन्दु को शून्य (0) से दिखाएँ। शून्य के दाईं ओर के बिन्दुओं पर क्रमशः 1,2,3, इत्यादि संख्याएँ लिखें। क्या संख्या रेखा को देखकर आप बता सकते हैं कि कौन सी संख्या बड़ी है? इसके लिए सोचिए कि किसी संख्या के बाईं ओर की संख्या इस संख्या से बड़ी होगी या छोटी?

www.rajteachers.com

3.2.2 पूर्ण संख्याओं के गुण

1. प्राकृत संख्याओं के सभी गुण पूर्ण संख्याओं के लिए भी सही है।
2. सबसे छोटी पूर्ण संख्या शून्य (0) है।
3. संख्या रेखा पर 0 से दाहिनी ओर क्रमशः पूर्ण संख्या बढ़ते क्रम में दिखाई गई है अर्थात्

$0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$... $101 + 1 = 102$, $102 + 1 = 103$, $103 + 1 = 104$... इत्यादि।

निम्नलिखित तालिका को देखकर सही या गलत बताइए।

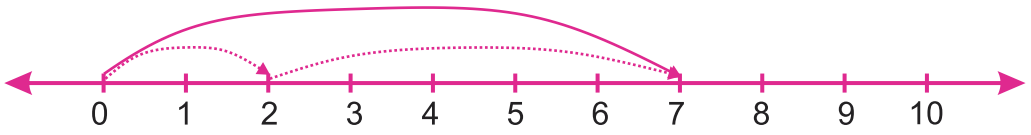
क्र.सं.	संख्याएँ	संख्या रेखा पर स्थिति	संख्याओं में संबंध	सही / गलत
1.	12, 8	8 के दाहिने ओर 12	12 > 8	
2.	3, 10	10 के बाईं ओर 3	10 < 3	
3.	66, 45	45 के दाहिनी ओर 66	66 > 45	
4.	236, 190	236 के बाईं ओर 190	190 < 236	
5.	1001, 1010	1001 के दाहिनी ओर 1010	1010 > 1001	

तालिका 3.2

3.2.3 संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं की संक्रियाएँ

पूर्ण संख्याओं पर साधारण जोड़, घटाव, गुणा और भाग की संक्रियाओं को संख्या रेखा पर करने का अभ्यास करें।

संख्या रेखा पर जोड़ना – आइए 2 और 5 का जोड़ करें –

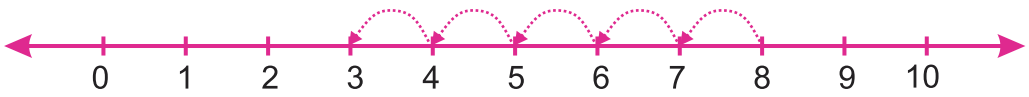


संख्या रेखा पर 2 से शुरू करके हम 2 से 5 इकाई दाईं ओर बढ़ते हैं और 7 पर पहुँचते हैं अतः 2+5=7 (अलग–अलग संख्याएँ लेकर अभ्यास करें)

संख्या रेखा पर जब दो संख्याओं को जोड़ते हैं तो पहले एक संख्या से आरंभ करते हुए दूसरी संख्या की इकाईयों तक पहुँचते हैं। हमें अभीष्ट योग प्राप्त होता है।

संख्या रेखा पर घटाना –

यह संक्रिया योग की सक्रिया की विपरीत दिशा में होगी। यदि 8 में से 5 को घटाना है तो –



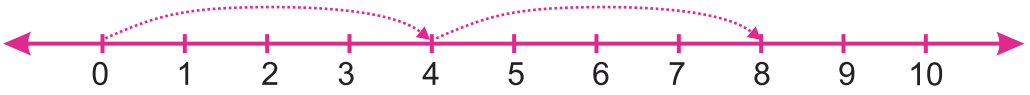
$8 - 5 = 3$ आप भी अलग–अलग संख्याएँ लेकर अभ्यास कीजिए।

www.rajteachers.com

संख्या रेखा पर गुणनफल

अब संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं का गुणनफल करेंगे।

2 x 4 का मान ज्ञात करेंगे। इसे हम (2 बार 4) के रूप में लिख सकते हैं।



संख्या रेखा पर 0 से आरंभ करते हुए एक बार में 4 तक पहुँचेंगे। पुनः चार कदम आगे बढ़ते हुए दूसरी बार में 8 तक पहुँचते हैं अर्थात् 2 x 4 = 8 हुआ।

प्रश्नावली 3.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) 55 की पूर्ववर्ती संख्या ... होगी।
   (ii) 100 की पूर्ववर्ती संख्या ... होगी।
   (iii) 305 की पूर्ववर्ती संख्या ... और परवर्ती संख्या ... होगी।
   (iv) प्राकृत संख्याओं में ... को शामिल करने से पूर्ण संख्याएँ बनती हैं।
   (v) 1 की पूर्ववर्ती संख्या ... होगी।

2. निम्नलिखित संख्याओं की पूर्ववर्ती संख्याएँ लिखिए।
   (i) 1203 (ii) 2406 (iii) 3555 (iv) 4444

3. निम्नलिखित संख्याओं की उत्तरवर्ती संख्याएँ लिखिए।
   (i) 2304 (ii) 3611 (iii) 4000 (iv) 5060

4. निम्न संख्याओं की पूर्ववर्ती एवं उत्तरवर्ती दोनों संख्याएँ लिखिए।
   (i) 189 (ii) 199 (iii) 209 (iv) 300

5. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?

6. निम्न कथनों में से सत्य के आगे (✓) एवं असत्य के आगे (✗) का चिन्ह लगाइए–
   (i) समस्त प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं।
   (ii) संख्या 1 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
   (iii) दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव पूर्ण संख्या होता है।

www.rajteachers.com

(iv) $245 + 450 = 450 + 245$

(v) $1124 + 0 = 0$

(vi) घटाने की संक्रिया योग संक्रिया की प्रतिलोम है।

(vii) $4 - 4 = 0$ (एक पूर्ण संख्या है)

(viii) $7 - 7 \neq 0$

(ix) किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल पूर्ण संख्या होती है।

(x) किसी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

(xi) किसी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

3.3 पूर्ण संख्याओं के गुण धर्म

3.3.1 संवृत गुण

नीचे दी गई संख्याओं को ध्यान से देखिए और विचार कीजिए।

$6 + 2 = 8$, एक पूर्ण संख्या

$2 + 8 = 10$, एक पूर्ण संख्या

$0 + 5 = 05$, एक पूर्ण संख्या

$12 + 0 = 12$, एक पूर्ण संख्या

$7 + 6 = 13$, एक पूर्ण संख्या

उक्त उदाहरणों में हमने देखा कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। ऐसी कुछ और पूर्ण संख्याओं के जोड़े लीजिए। क्या उनका योग भी पूर्ण संख्या आता है?

क्या आप ऐसा कोई जोड़ा ढूँढ पाए जिनका योग पूर्ण संख्या ना हो? आप पाएँगें कि पूर्ण संख्याओं का योग सदैव एक पूर्ण संख्या आता है।

इसलिए पूर्ण संख्याएँ योग के अन्तर्गत संवृत हैं।

क्या पूर्ण संख्याएँ घटाव के लिए भी संवृत है ?

निम्न पर विचार करें

$8 - 5 = 3$ एक पूर्ण संख्या, $10 - 9 = 1$ एक पूर्ण संख्या,

$0 - 5 = (-5)$ एक पूर्ण संख्या नहीं, $6 - 0 = 6$ एक पूर्ण संख्या,

$13 - 17 = (-4)$ एक पूर्ण संख्या नहीं

दो पूर्ण संख्याओं का व्यवकलन (घटाव) एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी।

अतः पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाव) के अन्तर्गत संवृत नहीं होती हैं।

आइए इन्हें भी देखिए व सोचिए।

$6 \times 2 = 12$ एक पूर्ण संख्या

$4 \times 5 = 20$ एक पूर्ण संख्या

$10 \times 0 = 0$ एक पूर्ण संख्या

www.rajteachers.com

$0 \times 8 = 0$ एक पूर्ण संख्या

हम देखते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

अतः हम कहेंगे कि पूर्ण संख्याएँ गुणन के अन्तर्गत संवृत होती है।

भाग (विभाजन) की संक्रिया पर भी विचार करें

$12 \div 4 = 3$ एक पूर्ण संख्या

$7 \div 8 = \frac{7}{8}$ एक पूर्ण संख्या नहीं

$0 \div 5 = 0$ एक पूर्ण संख्या

$20 \div 25 = \frac{4}{5}$ एक पूर्ण संख्या नहीं

दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी।

अतः पूर्ण संख्याएँ भागफल के अन्तर्गत संवृत्त नहीं होती हैं।

करो और सीखो

संवृत गुण (ClosureProperty)

पूर्ण संख्याएँ	संक्रियाएँ	परिणाम	निष्कर्ष
6 और 2	योग		
0 और 5	योग		
8 और 5	घटाव		
13 और 17	घटाव		
6 और 2	गुणा		
0 और 8	गुणा		
8 और 2	भाग		
7 और 9	भाग		

तालिका 3.3

3.3.2 शून्य द्वारा विभाजन

एक संख्या को किसी संख्या द्वारा विभाजित करने का अर्थ है उस संख्या को पहली संख्या में से बार–बार घटाना

$15 \div 5$ पर विचार कीजिए।

संख्या 15 में से 5 को तीन बार घटाने पर 0 मिलेगा।

अतः $15 \div 5 = 3$

आइए $4 \div 0$ का हल ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं।

(i) प्रत्येक बार घटाने पर हमें 4 पुनः प्राप्त होता है।

(ii) क्या यह प्रक्रिया कभी समाप्त होगी या नहीं?

अतः $4 \div 0$ को गणितीय भाषा में समझाना संभव नहीं है अतः हम कहेंगे यह अपरिभाषित है।

निष्कर्ष : पूर्ण संख्याओं का शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

www.rajteachers.com

3.3.3 क्रमविनिमेयता का गुण

आइए अब निम्न पर विचार करते हैं।

$8 + 7 = 15$,

$7 + 8 = 15$

इसी तरह

$19 + 15 = 34$,

$15 + 19 = 34$

अतः दो संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

आप 5 संख्या युग्म और लीजिए तथा तथ्य की जाँच कीजिए।

क्या किसी संख्या युग्म का योग क्रम बदलने से परिवर्तित होता है ? नहीं होता है।

अतः हम यह कह सकते हैं पूर्ण संख्याएँ योग संक्रिया के लिए क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करती है।

$8 \times 5 = 40$

$5 \times 8 = 40$

$25 \times 10 = 250$

$10 \times 25 = 250$

अतः दो संख्याओं को बदलकर पुनः गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

यह भी करें

$8 - 3 = 5$ $10 - 7 = 3$

$3 - 8 = ?$ $7 - 10 = ...?$

व्यवकलन की संख्याओं का क्रम बदलने पर वही उत्तर प्राप्त नहीं होता है।

इसी प्रकार

$8 \div 2 = 4$ $25 \div 5 = 5$

$2 \div 8 = ..?$ $5 \div 25 = ...?$

भाग की संख्याओं का क्रम बदलने पर भी वहीं संख्या प्राप्त नहीं होती है।

निष्कर्ष अतः हम कह सकते हैं कि

पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन दोनों के लिए क्रमविनिमेयता का गुण है।

पूर्ण संख्याओं के लिए व्यवकलन और भाग दोनों में ही क्रमविनिमेयता नहीं है।

www.rajteachers.com

पूर्ण संख्याएँ	संक्रियाएँ	परिणाम	निष्कर्ष
7 और 8	7 + 8 = 15	संख्याओं का क्रम बदलने पर योग वही प्राप्त होता है।	क्रम विनिमेयता है।
8 और 7	8 + 7 = 15		
9 और 6	9 - 6 = 3	संख्याओं का क्रम बदलने पर वही संख्या प्राप्त नहीं होती है।	क्रम विनिमेयता नहीं है।
6 और 9	6 - 9 = ?		
5 और 4	5 x 4 = 20	संख्याओं का क्रम बदलने पर गुणनफल वही प्राप्त होता है।	क्रम विनिमेयता है।
4 और 5	4 x 5 = 20		
10 और 2	10 ÷ 2 = 5	संख्याओं का क्रम बदलने पर वही संख्या प्राप्त नहीं होती है।	क्रम विनिमेयता नहीं है।
2 और 10	2 ÷ 10 = ?		

3.3.4 सहचारिता का गुण

$(5 + 2) + 4 = 7 + 4 = 11$
$5 + (2 + 4) = 5 + 6 = 11$
$(7 + 9) + 1 = 16 + 1 = 17$
$7 + (9 + 1) = 7 + 10 = 17$
$(5 + 8) + 7 = 13 + 7 = 20$
$5 + (8 + 7) = 5 + 15 = 20$

योग की उपर्युक्त संक्रियाओं को ध्यान से देखें पूर्ण संख्याओं में पाए जाने वाले इस गुण को सहचारिता कहते हैं।

क्या व्यवकलन के लिए साहचर्यता का गुण लागू होगा? सोचिए।

एक अन्य उदाहरण देखिए

$(6 \times 3) \times 2 = 18 \times 2 = 36$
$6 \times (3 \times 2) = 6 \times 6 = 36$

अतः गुणन की क्रिया में भी पहली दो संख्याओं को गुणा कर तीसरी संख्या से गुणा करें तो कोई अन्तर नहीं आता है। आइए सहचारिता के नियम को विभाजन की संक्रिया में देखिए।

$(24 \div 6) \div 2 = 2$
$24 \div (6 \div 2) = 8$

www.rajteachers.com

अतः तीन पूर्णांकों में आपस में विभाजन करने पर परिणाम अलग–अलग प्राप्त होता है।

निष्कर्ष : (i) योग एवं गुणन की संक्रियाओं में सहचारिता का गुण पाया जाता है।

(ii) व्यवकलन एवं विभाजन की संक्रियाओं में सहचारिता का गुण नहीं पाया जाता।

करो और सीखो

अब आप कोई भी तीन–तीन संख्याओं के जोड़े लेकर क्रमशः योग एवं गुणन संक्रिया के लिए साहचर्य गुणधर्म की जाँच कीजिए।

3.3.5 योग पर गुणन का वितरण

$4 \times 6 = 24$ को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$4 \times (4 + 2) = 24$

$(4 \times 4) + (4 \times 2) = 24$ या $4 \times (4 + 2) = 24$

इसी प्रकार आप इन संख्याओं को भी ध्यान से देखिए।

$8 \times (3 + 9) = (8 \times 3) + (8 \times 9)$

इसे योग पर गुणन का वितरण या बंटन गुण (Distributive property) कहते हैं।

3.3.6 तत्समक अवयव

योग एवं गुणन के लिए

निम्नलिखित सारणी पर विचार कीजिए।

8	+	0	=	8
4	+	0	=	4
0	+	5	=	5
0	+	24	=	24
0	+	....	=	...

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में शून्य (0) को जोड़ते हैं तो वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव या तत्समक (Identity element) कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं का योज्य तत्समक (additive Identity) कहते हैं।

7	x	1	=	7
8	x	1	=	8
15	x	1	=	15
18	x	1	=	18
.....	x	1	=	.....

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या को 1 से गुणा करते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक अवयव या

www.rajteachers.com

तत्समक कहते हैं। 1 को पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity) कहते हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए।
   (i) 85 + 186 + 15 (ii) 175 + 96 + 25
   (iii) 65 + 75 + 35 (iv) 55 + 86 + 45

2. उपयुक्त क्रम (नियम) लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 4 x 1225 x 25 (ii) 4 x 158 x 125
   (iii) 4 x 85 x 25 (iv) 8 x 20 x 125

3. निम्नलिखित में प्रत्येक का मान वितरण नियम द्वारा ज्ञात कीजिए।
   (i) 185 x 25 + 185 x 75 (ii) 4 x 18 + 4 x 12
   (iii) 54279 x 92 + 8 x 54279 (iv) 12 x 8 + 12 x 2

4. उपयुक्त गुणों का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 185 x 106 (ii) 208 x 185
   (iii) 54 x 102 (iv) 158 x 1008

5. मिलान कीजिए।

(i) 2 + 8 = 8 + 2	(a) गुणन की क्रम विनिमेयता
(ii) 8 x 90 = 90 x 8	(b) जोड़ की क्रम विनिमेयता
(iii) 885 x (100 + 45) = 885 x 100 + 885 x 45)	(c) गुणा का साहचर्य नियम
(iv) 5 x (4 x 28) = (5 x 4) x 28	(d) योग पर गुणन का वितरण नियम

6. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही शून्य होने चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
7. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1 है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही 1 के बराबर होनी चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
8. वितरण विधि से ज्ञात कीजिए।
   (i) 138 x 101 (ii) 125 x 400 (iii) 608 x 35

9. निम्नलिखित में से किसमें शून्य निरूपित नहीं होगा।
   (i) 1 + 0 (ii) 0 x 0 (iii) $\frac{0}{2}$ (iv) $10 - \frac{10}{2}$

www.rajteachers.com

10. सही उत्तर का क्रमाक्षर दिए गए कोष्ठक में लिखिए।

(i) निम्नलिखित में जोड़ का क्रम विनिमेय नियम किसमें है?

(a) $5 \times 8 = 8 \times 5$ (b) $(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$

(c) $(12 + 8) + 10 = (2 + 8) + 10$ (d) $15 + 8 = 8 + 15$ ( )

(ii) निम्नलिखित में से गुणन की क्रमविनिमेयता नियम किसमें है?

(a) $10 \times 20 = 20 \times 10$ (b) $10 \times 10 = 20 \times 20$

(c) $(10 \times 20) = 10 \times 1$ (d) $10 + 20 = 10 \times 20$ ( )

हमने सीखा

1. प्राकृत संख्याएँ वे संख्याएँ है जिनका प्रयोग गिनने के लिए करते है, जैसे 1, 2, 3.....
2. यदि प्राकृत संख्या में 1 जोड़ते है तो इसका परवर्ती मिलता है। किसी प्राकृत संख्या में से 1 घटाते हैं तो इसका पूर्ववर्ती प्राप्त होता है।
3. प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक परवर्ती होता है।
4. 1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक पूर्ववर्ती प्राकृत संख्याओं में ही होता है।
5. यदि प्राकृत संख्याओं के संग्रह 1, 2, 3.... में संख्या 0 को मिला दिया जाए तो हमें पूर्ण संख्याओं का संग्रह 0, 1, 2, 3.... प्राप्त होता है।
6. प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक परवर्ती होता है। 0 को छोड़कर प्रत्येक पूर्ण संख्या का पूर्ववर्ती होता है।
7. सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ नहीं होती लेकिन सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ है।
8. एक रेखा लेते हैं जिस पर एक बिन्दु 0 अंकित करते है। 0 के दाईं ओर समान अन्तराल (दूरी) पर बिन्दु अंकित कर क्रमशः 1, 2, 3... नामांकित करते हैं जिसे संख्या रेखा कहते हैं। संख्या रेखा पर आसानी से जोड़, व्यवकलन और गुणा जैसी संक्रियाएँ कर सकते हैं।
9. संख्या रेखा पर दाईं ओर चलने पर संगत योग प्राप्त होता है जबकि बाईं ओर चलने पर संगत व्यवकलन प्राप्त होता है। शून्य (0) से प्रारम्भ करके समान दूरी के कदम से गुणा प्राप्त होता है।
10. पूर्ण संख्याएँ योग और गुणनफल के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।
11. शून्य से भाग परिभाषित नहीं हैं।
12. पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव या तत्समक शून्य होता है तथा पूर्ण संख्या 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक कहते है।
13. पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन क्रम विनिमेय हैं।
14. पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन साहचर्य हैं।

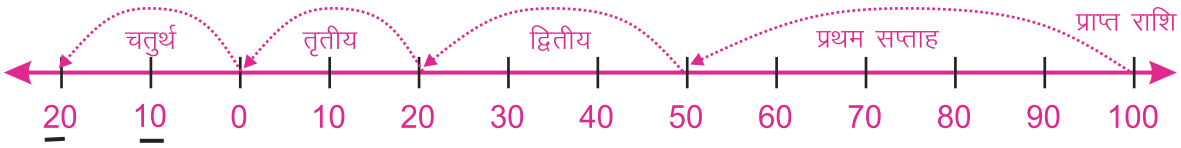
www.rajteachers.com

अध्याय 4

ऋणात्मक संख्याएँ एवं पूर्णांक

4.1 महेश एक जनजाति छात्रावास में रहकर पढ़ाई कर रहा है। उसके पिता उसे हर माह 100 रुपये जेब खर्च के लिए देते हैं वह उसे अपने वार्डन के पास जमा करवा देता है। जरूरत के अनुसार थोड़े–थोड़े पैसों का लेनदेन कर लेता है जिसे छात्रावास के वार्डन पेपर पर अंकित कर लेते हैं।

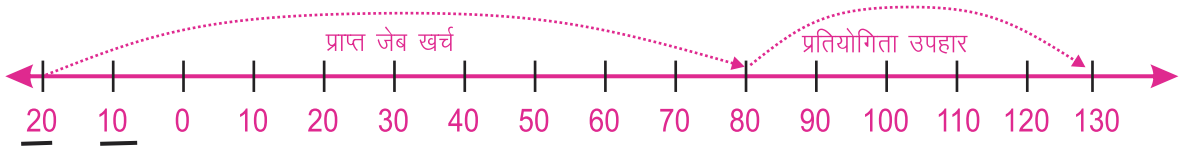
महेश ने प्रथम सप्ताह में 50 रुपये लिए, दूसरे सप्ताह 30 रुपये लिए तथा तीसरे सप्ताह में 20 रुपये लिए, चौथे सप्ताह में वह 20 रुपये और माँगता है। इस पर वार्डन कहते हैं कि मैंने आपकी पूरी राशि लौटा दी है, रमेश कहता है, आप इसे अगले महीने में काट लीजिएगा। वार्डन उसे 20 रुपये दे देते हैं तथा इसे संख्या रेखा पर निम्नानुसार अंकित करते हैं



राशि का विवरण

दूसरे माह के पहले दिन महेश को जेब खर्च के 100 रुपये मिले। जिसे उसने अपने वार्डन के पास जमा करवाए। क्या आप बता सकते हैं कि महेश के वार्डन के पास अब उसके कितने रुपये जमा हैं?

उसी दिन उसे निबंध लेखन के ईनाम में 50 रुपये और मिले अब महेश के कुल कितने रुपये वार्डन के पास जमा हो गए हैं ?



संख्या रेखा का अध्ययन कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. महेश ने प्रथम माह में कुल कितने रुपये खर्च किए।
2. चौथे सप्ताह में वार्डन ने उसे कितने रुपये दिए?
3. उक्त राशि को वार्डन ने संख्या रेखा पर किस ओर दर्शाया है।
4. शून्य के दाईं ओर लिखे 20 रुपये व बाईं ओर लिखे 20 रुपये में क्या अन्तर है?
5. दूसरे माह में प्राप्त 100 रुपये व 50 रुपये को संख्या रेखा में किस ओर अंकित किया गया है?
6. दूसरे माह में यदि महेश को बीमारी के कारण 200 रुपये खर्च करने पड़े तो वार्डन के पास कितना धन जमा रहेगा तथा उसे संख्या रेखा पर किस ओर अंकित किया जाएगा?

चलो ऐसा ही एक खेल खेलें। एक संख्या पट्टी बनाओ जैसी चित्र में दिखाई है –

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

www.rajteachers.com

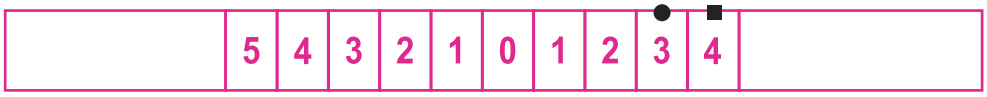
सामग्री : लाल व नीले रंग का पासा, एक कपड़े का थैला, सभी खिलाड़ियों के लिए अलग–अलग रंग की गोटीयाँ।

खेल के नियम

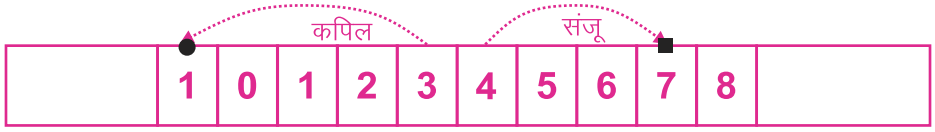
1. थैले में दोनों पासे रखे जाएँगे।
2. खिलाडी को एक पासा थैले से बिना देखे चयन करना है।
3. यदि लाल रंग का पासा चलेगा तो संख्या रेखा पर दाईं ओर चलेगा।
4. नीला पासा चलने पर बाईं ओर चलेगा।
5. जो पहले 25 पर पहुँचेगा वह जीतेगा।

संजू और कपिल भी यही खेल खेल रहे हैं।

संजू के लाल पासे पर 4 आता है वह गोटी को दाईं और 4 खाने पर रखता है। कपिल के भी लाल पासे पर 3 आता है वह अपनी गोटी को दाईं ओर 3 पर रखता है।



दूसरी बार में संजू को लाल पासे से 3 और कपिल को नीले पासे पर 4 आता है। क्या आप बता सकते हैं कि दोनों गोटियाँ कहाँ–कहाँ रखी जाएगी ?



कपिल अपनी गोटी बाईं ओर 1 पर रखता है तथा संजू 7 पर पहुँच जाता है इसी प्रकार खेल जारी रहता है। कपिल बाईं ओर 25 तक पहुँच जाता है तथा संजू दाईं ओर 10 तक पहुँचता है। कपिल कहता है कि वह जीत गया है परन्तु संजू का कहना है कि वह उससे आगे चल रहा है। इतने में गणित शिक्षिका वहाँ आती है वह उन्हें समझाती है–

शिक्षिका : "कपिल तुम नहीं जीते हो और नियम के अनुसार संजू को भी जीतने के लिए 15 अंक शेष हैं। तुम्हें खेल जारी रखना होगा।

कपिल : दीदी मैं तो 25 पर पहुँच चुका हूँ।

शिक्षिका : ध्यान से देखो दाईं ओर के 25 व बाईं ओर के 25 अलग–अलग संख्याओं को दर्शाते हैं जिस प्रकार 10, 5 के दाईं ओर है तो वह 5 से बड़ा है। इसी प्रकार प्रत्येक संख्या अपनी दाईं ओर की संख्या से छोटी होती है।

संजू : इसलिए तेरे 25 बाईं ओर होने के कारण मेरे 10 से छोटे हुए।

शिक्षिका : संख्या रेखा पर संख्याएँ दाईं ओर बढ़ती है। प्रत्येक संख्या अपनी बाईं ओर की संख्या से बड़ी तथा दाईं ओर की संख्या से छोटी होती है। शून्य के बाईं ओर की संख्याओं को ऋणात्मक संख्याएँ कहते हैं तथा इन्हें दाईं ओर की संख्याओं से पृथक दर्शाने के लिए –1, –2, –3... से प्रदर्शित करते हैं।

प्रत्येक संख्या के बाद वाली संख्या उसकी परवर्ती संख्या कहलाती है तथा उसके पहले आने वाली संख्या पूर्ववर्ती संख्या कहलाती है। नीचे दी गई तालिका में संख्याओं के परवर्ती व पूर्ववर्ती लिखिए।

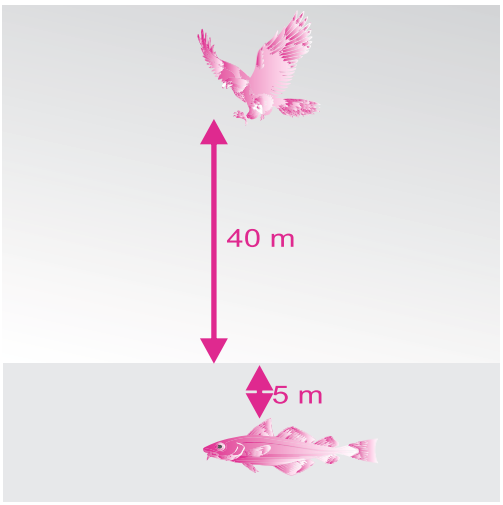


www.rajteachers.com

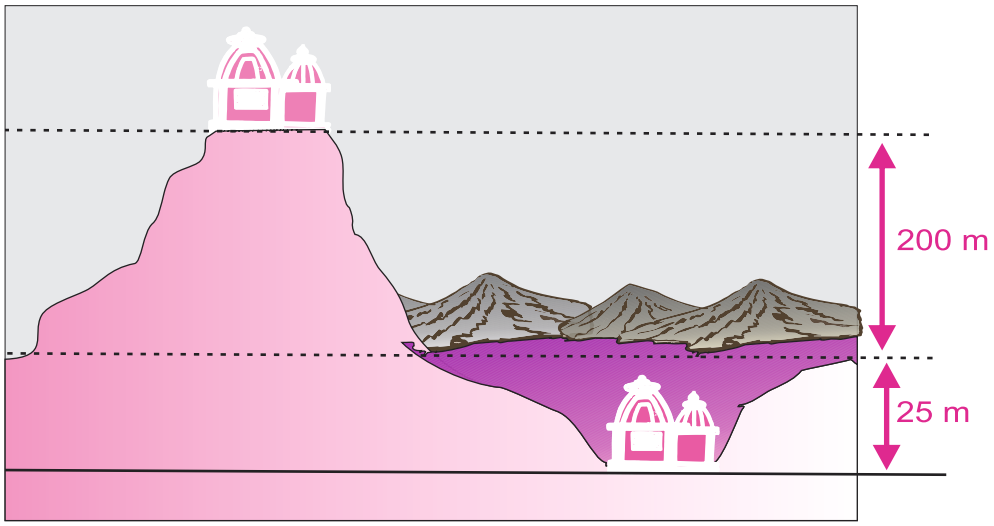
संख्या	परवर्ती	पूर्ववर्ती
–5		
6		
0		
25		
–10		

4.2 ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग

1. एक बाज समुद्र तल से 40 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है उसके ठीक नीचे एक मछली समुद्र तल से 5 मीटर नीच अर्थात् (–5) मीटर पर तैर रही है।



2. पहाड़ी पर एक मंदिर पृथ्वी तल से 200 मीटर ऊँचाई पर है वहीं खाई में एक और मंदिर पृथ्वी तल से 25 मीटर नीचे अर्थात् (-25) मीटर पर है।



www.rajteachers.com

करो और सीखो

उचित चिह्नों का प्रयोग करते हुए लिखिए।

1. 0 से छोटी कोई 2 संख्याएँ
2. समुद्रतल से 50 मीटर नीचे
3. $0^{\circ}C$ से $10^{\circ}C$ नीचे तापमान
4. $0^{\circ}C$ से $15^{\circ}C$ ऊपर तापमान

4.3 पूर्णांक

सबसे पहले ज्ञात की गई प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3... इसके पश्चात् संख्याओं के समूह में 0 को सम्मिलित करने पर वे पूर्ण संख्याएँ कहलाती है 0, 1, 2, 3...। अब हमें ज्ञात हो चुका है कि संख्याएँ ऋणात्मक भी होती है जैसे –1, –2, –3...। यदि हम पूर्ण संख्याओं के समूह में ऋणात्मक संख्याओं को शामिल कर लें तो बनने वाली नयी संख्याओं का समूह पूर्णांक कहलाता है। इस समूह को I से प्रदर्शित करते हैं।

संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण



संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण ठीक उसी प्रकार करते हैं जैसा कि हमने पूर्ण व प्राकृत संख्याओं में किया। फर्क सिर्फ इतना है कि पूर्णांकों में ऋणात्मक संख्याएँ भी होती है जिन्हें संख्या रेखा पर 0 के बाईं ओर बराबर दूरी पर बिंदु बनाकर अंकित करेंगे जैसे यदि हम संख्या रेखा पर –6 को प्रदर्शित करना चाहते हैं तो इसे 0 से बाईं ओर 6 बिन्दु चल कर अंकित करेंगे।



और यदि हमें संख्या रेखा पर +3 प्रदर्शित करना है तो इसे 0 से दाईं ओर 3 बिंदु पर अंकित करेंगे।



करो और सीखो

संख्या रेखा पर –3, 5, –1, 0, –5, 6 को अंकित कीजिए।

4.4 पूर्णांकों में क्रमबद्धता

हम जानते हैं कि $5 > 3$ होता है तथा संख्या रेखा से हम देखते हैं कि संख्या 5 संख्या 3 के दाईं ओर स्थित है।



इसी प्रकार $3 > 0$ संख्या 3, संख्या 0 के दाईं ओर स्थित है। अब चूंकि संख्या 0, संख्या

www.rajteachers.com

–3 के दाईं ओर स्थित है अतः 0>–3 है।पुनः संख्या –3,संख्या –8 के दाईं ओर स्थित है इसलिए – 3>–8 है।

इस प्रकार हम देखते हैं संख्या रेखा पर जब हम दाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान बढ़ता है और बाईं ओर चलने पर संख्या का मान घटता है।

प्रश्नावली 4.1

1. दी गई परिस्थितियों हेतु उपयुक्त पूर्णांक लिखिए।
   (i) पानी $45^{\circ}C$ गर्म है।
   (ii) एक द्रव्य शून्य से नीचे $10^{\circ}C$ पर जमता है।
   (iii) रीना को पुस्तक बेचने पर रु. 300 का लाभ हुआ।
   (iv) बैंक के खाते से 500 रुपये निकालना।
2. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।
   (i) + 5 (ii) – 4 (iii) 0 (iv) – 2
3. चिह्न >, < तथा = का प्रयोग कर छोटी एवं बड़ी संख्या बताइए।
   (i) 3 ☐ – 5 (ii) –2 ☐ – 4
   (iii) 7 ☐ – 7 (iv) 0 ☐ – 3
   (v) 0 ☐ 3 (vi) 1 ☐ – 50
4. निम्न कथनों के लिए सत्य अथवा असत्य लिखिए।
   (i) –4 संख्या रेखा पर –3 के दाईं ओर स्थित है। ( )
   (ii) शून्य एक ऋणात्मक संख्या है। ( )
   (iii) सबसे छोटा ऋणात्मक पूर्णांक –1 है। ( )
   (iv) 0 संख्या रेखा पर –1 व 1 के मध्य स्थित है। ( )
5. नीचे दिए गए युग्मों के पूर्णांकों के बीच सभी पूर्णांक बढ़ते क्रम में लिखिए।
   (i) 0 व – 4 (ii) –3 व –5
   (iii) –2 व 2 (iv) –10 व –6
6. निम्न पूर्णांकों को आरोही व अवरोही क्रम में लिखिए।
   (i) –7, 5, –3, 3 (ii) –1, 3, 0, –2
   (iii) 1, 3, –6 (iv) –5, 4, –1, 2

4.5 पूर्णांकों में जोड़

इमली के बीज का खेल

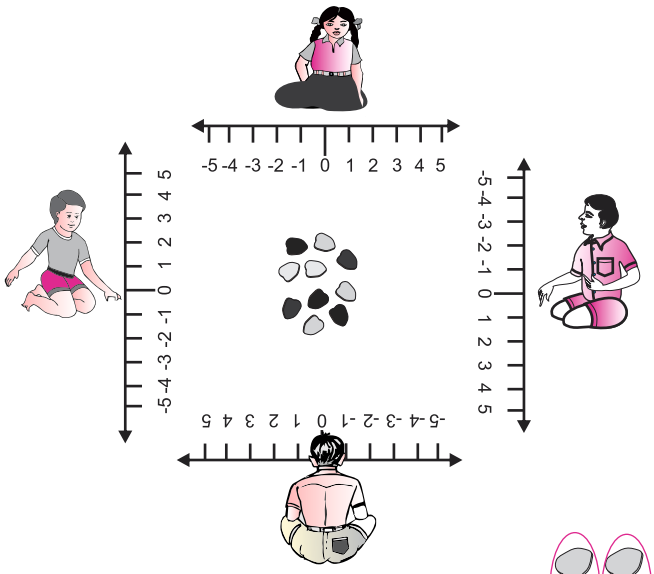
सामग्री : इमली के बीज (10) बीच में से फोड़े हुए, प्रत्येक खिलाड़ी के लिए एक संख्या रेखा, पोटली/कटोरी प्रत्येक खिलाडी के लिए एक गोटी।

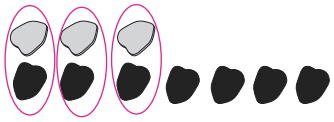
खेल के नियम

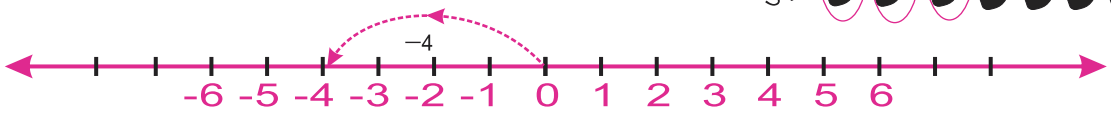
1. प्रत्येक बीज का सफेद भाग +1 तथा काला भाग – 1 को प्रदर्शित करेगा।
2. बारी बारी से सभी खिलाड़ी बीज उछालेंगे। उछलकर जमीन पर गिरे बीजों से 1 सफेद 1 काला आपस में निरस्त होकर पोटली में जाएँगे। शेष बीजों की स्थिति के अनुसार खिलाड़ी अपनी संख्या रेखा पर गोटी रखेगा। इसी प्रकार खेल जारी रहेगा।

www.rajteachers.com

3. जो खिलाड़ी सबसे पहले 10 पर पहुँचेगा विजयी होगा। प्रज्ञा व धीरज यही खेल खेल रहे हैं।



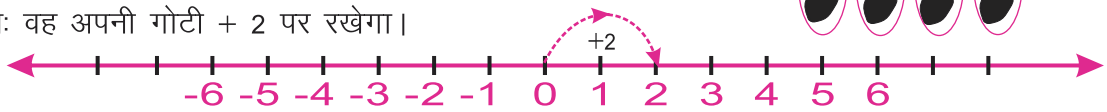
प्रज्ञा ने बीज उछाले जिसमें तीन सफेद तथा सात काले बीज प्राप्त हुए 



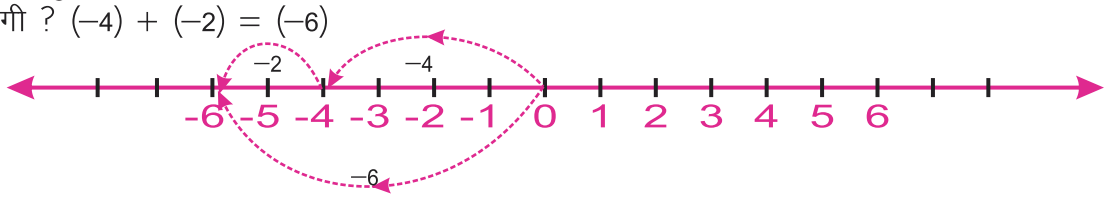
अतः निरस्त होने के बाद चार काले बीज प्राप्त होते हैं, वह अपनी गोटी (–4) पर रखती है।

अब धीरज ने बीज उछाले, उसे चार काले और छः सफेद प्राप्त हुए। 

अतः वह अपनी गोटी + 2 पर रखेगा।



पुनः प्रज्ञा को अगली बारी में दो काले बीज प्राप्त होते हैं अब उसकी गोटी किस दिशा में आगे बढ़ेगी ? (–4) + (–2) = (–6)



दो धन पूर्णांकों का योग इस तरह करते हैं

(+ 4) + (+ 2) = (+ 6)

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग इस तरह करते हैं

(–3) + (–2) = (–5)

करो और सीखो ◆ निम्न को हल कीजिए –

(i) (–7) + (+8) (ii) –3 + (5)

(iii) (–3) + (–2) (iv) (+7) + (–2)

www.rajteachers.com

ध्यान रहे यहाँ पर हम धन एवं ऋण चिह्नों का प्रयोग जोड़ घटाव के सन्दर्भ के साथ पूर्णांकों की दिशा बताने के लिए भी कर रहे हैं। अतः 7 – 3 और (+ 7) + (–3) सर्वथा भिन्न है यह बात और है कि दोनों का परिणाम समान है।

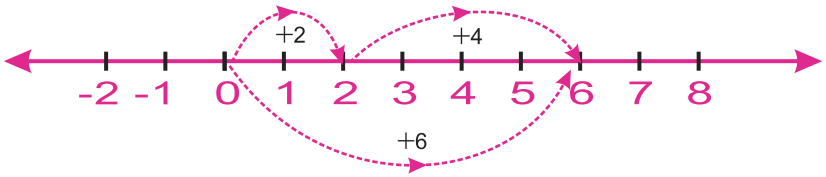
7 – 3 दो पूर्ण संख्याओं 7 तथा 3 का अन्तर है जबकि (+ 7) + (– 3) दो पूर्णांकों का योग है इसी क्रम में (+7) – (+ 3) दो पूर्णाकों का घटाव है।

4.5.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का योग

सदैव इस तरह बीजों के सफेद व काले भागों से पूर्णांकों को जोड़ना संभव नहीं होता। आइए संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का योग करना सीखे।

(i) (+ 2) + (+ 4)

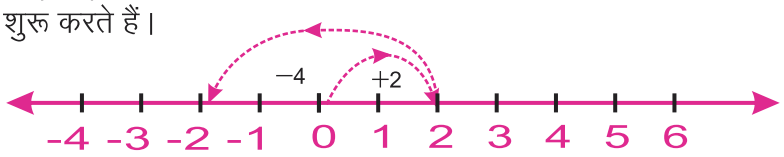
संख्या रेखा पर हम शून्य से प्रारम्भ करते हैं।



तथा (+ 2) अर्थात् 2 कदम दाईं और चलते हैं। तत्पश्चात (+ 4) का अर्थ है 4 कदम दाईं ओर दोनों के योग का अर्थ है 2 कदम दाईं ओर चलने के बाद 4 कदम दाईं ओर और चलना जिससे हम कुल 6 कदम दाईं ओर बढ़ते हैं। अतः उत्तर के रूप में + 6 प्राप्त होता है।

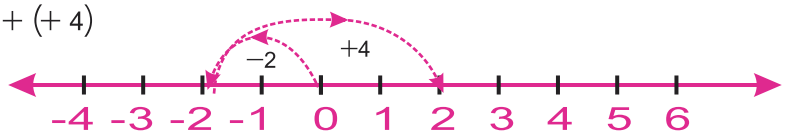
(ii) (+ 2) + (– 4)

संख्या रेखा पर शून्य से शुरू करते हैं।



(+ 2) अर्थात् 2 कदम दाईं ओर चलते हैं। तत्पश्चात् (–4) का अर्थ 4 कदम बाईं ओर चलते हैं, बीच में लगा धन चिह्न जोड़ की संक्रिया के लिए है जो यह बताता है कि ''और चलो'' इस प्रकार हम 1, 0, –1 होते हुए –2 पर पहुँचते हैं अतः (+ 2) + (- 4)= –2

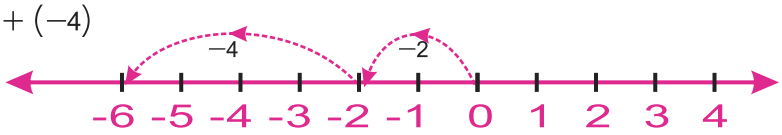
(iii) (–2) + (+ 4)



पूर्व की भांति शून्य से शुरू कर दो कदम बाईं ओर (–2) के लिए चलने के बाद (+ 4) के लिए 4 कदम दाईं ओर चलेंगे। जिससे हम –1, 0, 1 होते हुए (+2) पर पहुँच जाएँगे।

अतः (–2) + (+4) = 2

(iv) (–2) + (–4)



www.rajteachers.com

इसी प्रकार शून्य से प्रारम्भ करते हुए (–2) के लिए 2 कदम बाईं ओर तथा (–4) के लिए और 4 कदम बाईं ओर चलेंगे। परिणामस्वरूप –3, –4, –5 होते हुए –6 पर पहुँच जाएँगे।

अतः (–2) + (–4) = –6

हमने देखा कि जब धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ते हैं तो हम दोनों बार दाईं ओर चलते हैं। फलतः दाईं ओर ही पहुँचते हैं और परिणाम धनात्मक प्राप्त होता है।

दो से अधिक धनात्मक पूर्णांकों का योग क्या होगा ? धनात्मक / ऋणात्मक / शून्य

इसी प्रकार दो ऋणात्मक पूर्णांकों के योग में दोनों बार बाईं ओर ही चलते हैं फलस्वरूप बाईं ओर ही पहुँचते हैं तथा परिणाम भी ऋणात्मक ही प्राप्त होता है।

दो से अधिक ऋणात्मक पूर्णांक होने पर परिणाम कैसा प्राप्त होगा ? धनात्मक / ऋणात्मक / शून्य परन्तु एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योग करने पर दाईं एवं बाईं दोनों ओर चलना पड़ेगा। तब परिणाम इस बात पर निर्भर करता है कि किस ओर ज्यादा चलना है अर्थात् धनात्मक पूर्णांक बड़ा है अथवा ऋणात्मक।

करो और सीखो

निम्न तालिका को भरिए।

क्र.सं.	योग	परिणाम धनात्मक / ऋणात्मक	योगफल
1.	(–6) + (+7)		
2.	(–9) + (–1)		
3.	(+3) + (+5)		
4.	(+12) + (–7)		

उदाहरण 1 योग (- 8) + (+4) + (–5) + (+2) ज्ञात कीजिए।

हल धनात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णांकों को पुनर्व्यवस्थित करने पर

= (–8) + (–5) + (+4) + (+2)

= (–13) + (+6)

= (–7)

उदाहरण 2 (+30) + (–20)+(–70)+(+65) को हल कीजिए।

हल (+30) + (–20) + (–70) + (+65)

= (+30) + (65) + (–20) + (–70)

= (+95) + (–90)

= 5 उत्तर

प्रश्नावली 4.2

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो –
   (i) 5 से 4 अधिक है (ii) –4 से + 4 अधिक है
   (iii) 3 से 5 कम है (iv) – 1 से +4 कम है
2. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए निम्न का मान ज्ञात कीजिए।
   (i) 9 + (–3) (ii) (–4) + (–3)
   (iii) (–2) +5 (iv) (–1) +3 + (–2)

www.rajteachers.com

3. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए।

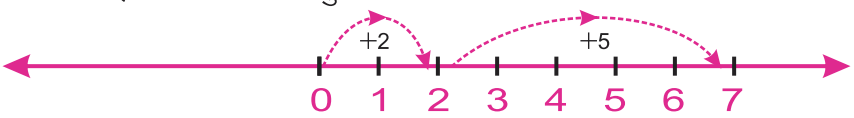
(i) 11 + (–2) (ii) (–4) + (–6)
(iii) (–250) +150 (iv) (–380) + (–270)
(v) (–14) + 4 (vi) (–180) + (–80)

4. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

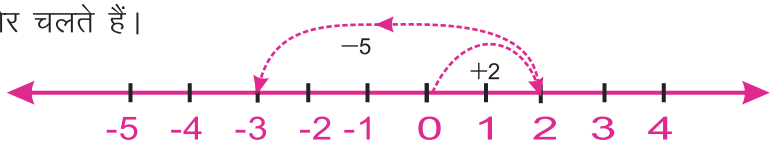
(i) 137 + (–354) +125 (ii) (–312) + 39 + 192
(iii) 37 + (–3) +24 + (–8) (iv) 102 + (–24) + (24) + (–11)

4.6 संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का घटाव

हम संख्या रेखा पर दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ चुके हैं (+2) + (+5) पर विचार कीजिए। (+2) अर्थात् शून्य से प्रारम्भ कर 2 कदम दाईं तरफ चलकर +2 पर पहुँचते हैं इसमें (+5) जोड़ने का अर्थ 5 कदम दाईं तरफ चलना है और इस प्रकार 7 तक पहुँचते हैं।



हमने यह भी देखा कि संख्या रेखा पर (+2) + (–5) में (+2) में (–5) जोड़ने के लिए (+2) से 5 कदम बाईं ओर चलते हैं।



इस प्रकार हम पाते हैं कि धनात्मक पूर्णांक जोड़ने के लिए दाईं ओर तथा ऋणात्मक पूर्णांक जोड़ने के लिए बाईं ओर चलेंगे क्या घटाव के लिए भी ऐसे ही चलना होगा ? आइए 5–2 पर विचार करें।

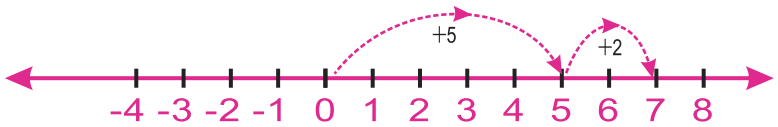
$$5 - 2 = (+5) - (+2)$$

चूँकि घटाव योग की विपरीत संक्रिया है अतः +2 घटाने के लिए हमें 5 से 2 कदम बाईं ओर चलना पड़ेगा। (जबकि योग में दाईं ओर चलते हैं)

इसी प्रकार (+5) – (–2) में क्या करेंगे? दाईं ओर चलेंगे अथवा बाईं ओर –2 जोड़ने के लिए हम बाईं ओर चलते हैं इसके विपरीत (–2) घटाने के लिए 2 कदम दाईं ओर चलेंगे।



(+ 5) + (- 2)



(+5) - (-2)

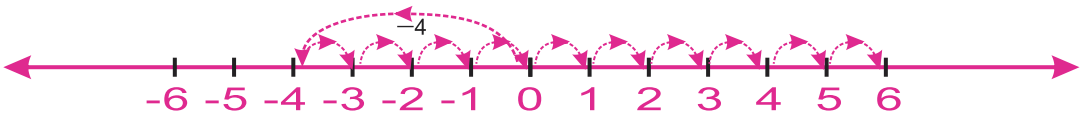
करो और सीखो

निम्न का घटाव संख्या रेखा की सहायता से कीजिए।

(i) (+7) – (+3) (ii) (+3) – (+7)
(iii) (+7) – (–3) (iv) (–7) – (–3)

www.rajteachers.com

उदाहरण 3 संख्या रेखा की सहायता से (–4) – (–10) का मान ज्ञात कीजिए।



(–4) – (–10) = +6

4.7 योज्य तत्समक

आप जानते हैं कि 5+0=5, –8+0=–8

अर्थात् योग संक्रिया में 0 ऐसी संख्या है जो उसी के समान परिणाम देती है।

यहाँ **शून्य योज्य तत्समक** कहलाता है।

हमने पूर्ण संख्याओं में भी योज्य तत्समक पढ़ा है।

4.8 योज्य प्रतिलोम

किसी संख्या का योज्य प्रतिलोम वह संख्या है जिसे जोड़ने पर हमें शून्य (योज्य तत्समक) प्राप्त होता है।

जैसे 5 में क्या जोड़ें कि शून्य प्राप्त हो। स्पष्टतः –5

(5) + (–5) = 0 इसी प्रकार – 5 का योज्य प्रतिलोम +5

इसी प्रकार 8 का योज्य प्रतिलोम –8 और –13 का योज्य प्रतिलोम +13 है क्योंकि (–13) + (+13) = 0, 8 + (–8) = 0

पहली संख्या से दूसरी संख्या घटाने का अर्थ है पहली संख्या में दूसरी संख्या के योज्य प्रतिलोम को जोड़ा। क्या आपको यह बात ठीक लगती है?

जैसे (+12) – (+5) = 12 + (+5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 + (–5) = 12 – 5 =7

इसी प्रकार 12 – (–5) = 12 + (–5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 + (+5), = 12 + 5 = 17

अतः हमने देखा कि धनात्मक पूर्णांक घटाने से संख्या का मान कम होता है। जबकि ऋणात्मक पूर्णांक घटाने से संख्या का मान बढ़ जाता है।

4.9 पूर्णांकों का निरपेक्ष मान

एक संख्या रेखा पर पूर्णांकों को प्रदर्शित कीजिए। देखकर बताइए +5 शून्य से कितनी दूरी पर है तथा -5 शून्य से कितनी दूरी पर है ? इन दोनों दूरियों में क्या संबंध है ?

दोनों दूरियों का परिमाण 5 है, इस प्रकार 5 को +5 और -5 का निरपेक्ष मान कहते हैं।

-5 के निरपेक्ष मान को |-5| और +5 के निरपेक्ष मान को |+5| लिखते हैं। इस प्रकार

|-5| = 5 = |+5| |-7| = 7 = |+7| |0| = 0

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 4.3

1. निम्न को घटाइए।

(i) +32 – (+12) (ii) +7 – (+15)

(iii) (–14) – (–20) (iv) (–30) – (–15)

(v) 23 – (–10) (vi) (–27) –22

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) –5 +.....= 0 (ii) 7 +.....= 0

(iii) 11 +(–11) = ... (iv) (–3) +.....= –7

(v) 14–.....= 16 (vi) (–4) +.....= –8

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति >, < अथवा = का चिह्न लगाकर कीजिए।

(i) (–2) + (–9) ..... (–2) + (–4)

(ii) (–21) + (–10) ..... (–10) + (–21)

(iii) 45 – (–12) ..... (–12) + 45

(iv) (–14) + (14) ..... (–7) + (1)

4. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) (–7) +(–4) + 11 (ii) (–12) +(–3) – (–4)

(iii) 14 – 8 – (–2) (iv) (–24) +(–12) – (–8)

हमने सीखा

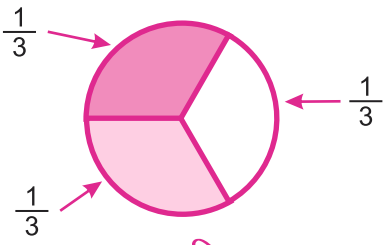
1. हमें दैनिक जीवन में कई बार ऋणात्मक चिह्नों वाली संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है। तब हमें संख्या रेखा पर शून्य से नीचे की ओर जाना पड़ता है। ये ऋणात्मक संख्याएँ कहलाती है।
2. ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ... जैसे संख्याओं के समूह पूर्णांक कहलाते है जिनमें ..., –4, –3, –2, –1 संख्याएँ ऋणात्मक पूर्णांक एवं 1, 2, 3, 4, ... धनात्मक पूर्णांक कहलाती है।
3. किसी संख्या की पूर्ववर्ती एवं परवर्ती (उत्तरवर्ती) संख्या 1 घटाने एवं 1 जोड़ने से प्राप्त होती है।
4. (i) जब समान चिह्न हो तो जोड़िए और वही चिह्न लगाइए।
   (ii) जब हमारे पास अलग–अलग चिह्न वाली संख्याएँ हो तो उन्हें घटाकर बड़ी संख्या का चिह्न लगा देते हैं।
5. हमने संख्या रेखा पर पूर्णांकों का योग एवं घटाव करना भी सीखा।
6. शून्य योज्य तत्समक कहलाता है।
7. किसी संख्या का योज्य प्रतिलोम वह संख्या है, जिसे उसी संख्या में जोड़ने पर शून्य प्राप्त होता है।

www.rajteachers.com

अध्याय 5

भिन्न

5.1 हमने बराबर–बराबर बाँटने के रूप में भिन्न को प्राथमिक कक्षाओं में पढा है। चलो उसका दोहरान करते हैं। जब एक रोटी को 3 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटेंगे तो प्रत्येक बच्चे को मिलने वाला भाग एक बटा तीन $\frac{1}{3}$ या एक तिहाई कहलाता है।



आकृति 5.1

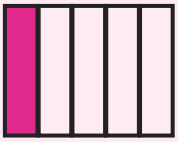
करो और सीखो

नीचे दिए गए चित्रों (रंगे गए भागों) का भिन्न से मिलान कीजिए।

(i)  $\frac{1}{5}$

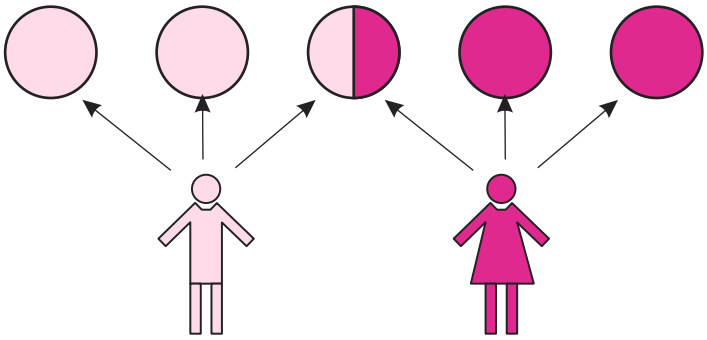
(ii)  $\frac{1}{4}$

(iii)  $\frac{1}{8}$

(iv)  $1+\frac{1}{2}$

(इन भिन्नों को पढ़ने की कोशिश कीजिए)

इसी प्रकार जब हम पाँच रोटियों को 2 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटते हैं तो इसे इस प्रकार लिखते व पढ़ते हैं।

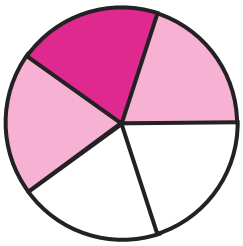


$2 + \frac{1}{2}$ (दो और एक बटा दो)

www.rajteachers.com

इसे भी समझो

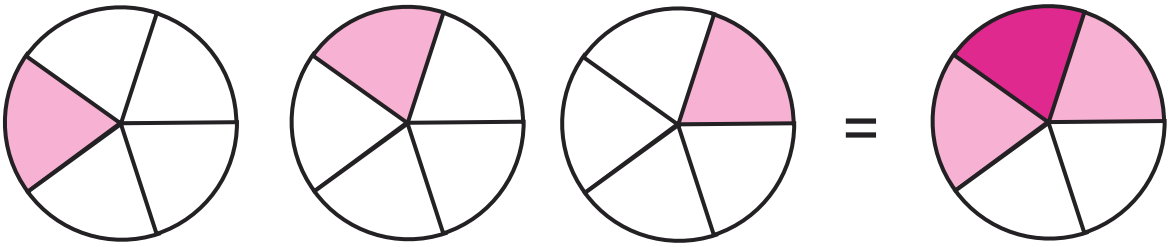
अभी हमने $\frac{3}{5}$ को एक रोटी में इस प्रकार दर्शाया।



आकृति 5.2

सोचो अगर हमारे पास तीन रोटी होती और हम प्रत्येक के पाँच–पाँच हिस्से कर, उसमें से एक हिस्सा लेते, तब रंगे गए हिस्से कितनी रोटी को दर्शाते हैं ?

अतः यह तीनों $\frac{1}{5}$ मिलकर एक रोटी के $\frac{3}{5}$ हिस्से को दर्शाते हैं।



$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$

आकृति 5.3

परन्तु ध्यान रहे अगर तीन रोटी में से हिस्से पूछे जाए तो रंगे गए हिस्से कुल 3 रोटी के $\frac{1}{5}$ हिस्से को दर्शा रहे हैं।

अभी तक हमने बराबर–बराबर बाँटने के रूप में भिन्न को दर्शाना व पढ़ना सीखा है। अब हम इकाई के हिस्सों के रूप में भिन्न को समझने का प्रयास करेंगे।

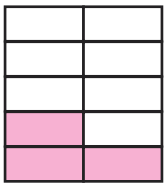
लाली के पास एक बड़ी टॉफी थी जिसमें दस बराबर भागों पर निशान बने थे। आधी छुट्टी होने पर लाली ने टॉफी के तीन बराबर हिस्से अलग कर खा लिए।

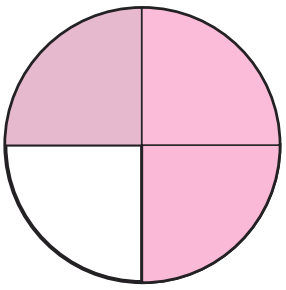
सोचो लाली ने टॉफी का कितना हिस्सा खाया ?

टॉफी के खाए गए हिस्से = 3

टॉफी के कुल किए गए बराबर हिस्से = 10

लाली द्वारा खाई गई टॉफी = $\frac{3}{10}$ (तीन बटा दस)





इसी प्रकार विक्रम ने विद्यालय में पोषाहार में मिली रोटी के चार बराबर हिस्से कर उसमें से तीन हिस्से खाए। तब विक्रम द्वारा रोटी खाई गई

$$= \frac{\text{रोटी के लिए गए या दर्शाए गए हिस्से}}{\text{रोटी के किए गए कुल समान हिस्से}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

एक इकाई के किए गए कुल टुकडे हर और उसमें से लिए गए टुकड़ों की संख्या को अंश कहते हैं।

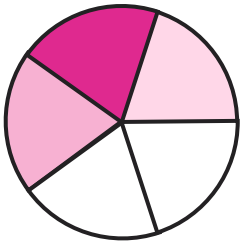


इसे तीन बटा चार या तीन चौथाई पढ़ते हैं।

एक इकाई के किए गए कुल टुकड़े हर, और उनमें से लिए गए टुकड़ों की संख्या को अंश कहते हैं। इस प्रकार तुम सोचकर बताओ कि एक रोटी के पाँच बराबर हिस्सों में तीन हिस्से लेने पर वह इकाई के कितने भाग को दर्शाता है ?

www.rajteachers.com

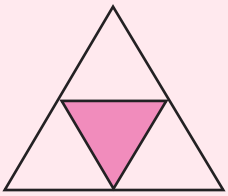
तुमने ठीक सोचा $= \frac{3}{5}$ अंश / हर

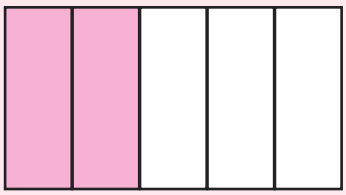


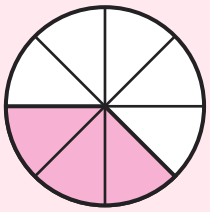
इसे तीन बटा पाँच पढ़ते हैं यहाँ 3 अंश व 5 हर को व्यक्त करता है।

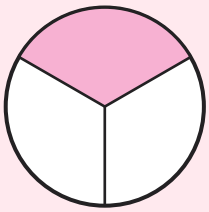
करो और सीखो

निम्नांकित आकृतियों के छायांकित भाग को भिन्न के रूप में लिखिए।









5.2 भिन्नों को चित्रों द्वारा समझाना

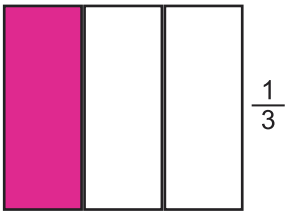
अब तक हमने भिन्न को बराबर–बराबर बाँटने व इकाई को हिस्सों के रूप में दर्शाना सीख लिया है। अब हम दी गई भिन्न को चित्र द्वारा दर्शाना सीखेंगे।

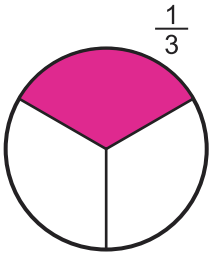
$\frac{1}{3}$ को चित्र द्वारा दर्शाना- $\frac{1}{3}$ में अंश 1 व हर 3 है, हर बताता है कि हमें इकाई के कितने बराबर हिस्से करने हैं। यहाँ हर तीन है अतः हम इकाई के तीन समान हिस्से करेंगे।

सीमा ने आयत का चित्र बनाकर तीन समान हिस्से किए।

जॉन ने वृत बनाया तीन समान हिस्से किए।

फज़लू ने स्केल से 1 इंच की रेखा बना कर उसके तीन समान हिस्से किए।





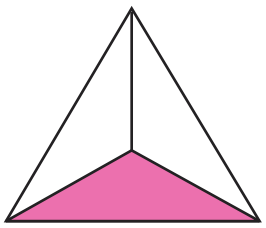


$\frac{1}{3}$ में अंश 1 रंगे अथवा लिए गए हिस्सों को दर्शाता है।

तुम कोई भी चित्र बनाकर उसमें भिन्न $\frac{1}{3}$ को दर्शा सकते हो, पर शर्त यह है कि तीनों टुकड़े बराबर होने चाहिए।

www.rajteachers.com

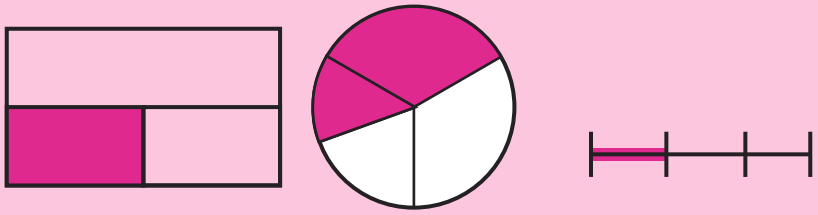
यह देखो चंदा ने त्रिभुज में $\frac{1}{3}$ को दर्शाया



यहाँ सीमा, जॉन व फज़लू ने $\frac{1}{3}$ को अलग–अलग चित्रों के द्वारा दर्शाया परंतु एक चीज़ समान है, वह यह है कि इन सभी चित्रों में इकाई के तीन समान टुकड़े कर उसका एक हिस्सा छायांकित किया गया है।

करो और सीखो

1. नीचे दिए गए चित्र में से $\frac{1}{3}$ के लिए कौन से चित्र ठीक हैं और कौन से नहीं ? कारण भी बताइए।



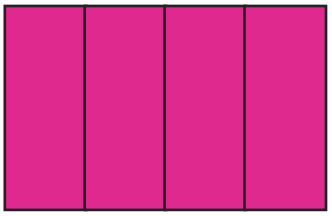
2. नीचे दिए गए भिन्नों को उचित चित्रों द्वारा दर्शाइए।

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{5}$

5.3 उचित, अनुचित एवं मिश्रित भिन्न

अभी हमने भिन्नों को चित्रों द्वारा दर्शाना सीखा है। अब क्या आप $\frac{5}{4}$ को चित्र द्वारा दर्शा सकते हो?

$\frac{5}{4}$ में 5 अंश है, व 4 हर है।



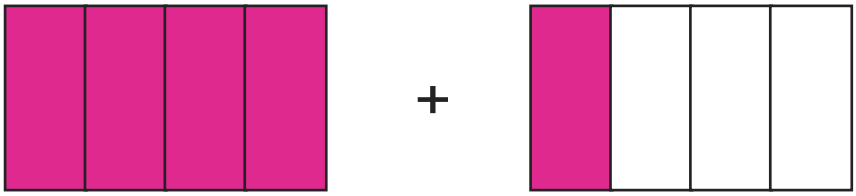
हम जानते हैं कि हर, इकाई के किए जाने वाले कुल बराबर हिस्सों को दर्शाता है। अतः हमने आयत बना कर उसके 4 हिस्से किए।

अब $\frac{5}{4}$ में 5 अंश है जो बताता है कि हमें कितने हिस्से लेने हैं। पर क्या हम कुल 4 हिस्सों में से 5 हिस्से ले सकते हैं?

नहीं अतः हम एक और इकाई बना कर उसके भी 4 समान हिस्से करते हैं।

अब पहली इकाई के चार पूरे हिस्से व दूसरी इकाई से एक हिस्सा अतः कुल पाँच हिस्से रंगे हुए लेते हैं यह $\frac{5}{4}$ को दर्शाता है। $\frac{5}{4}$ को अनुचित भिन्न भी कहते हैं।

ऐसी भिन्न जिसमें अंश, हर से बड़ा या बराबर होता है, अनुचित भिन्न कहलाती है।



$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$

www.rajteachers.com

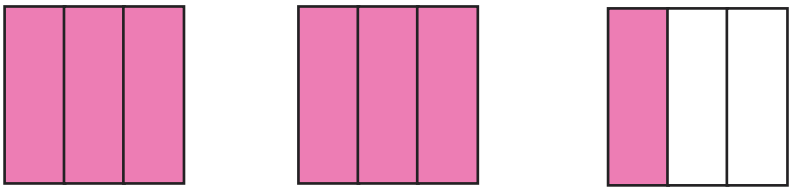
उचित भिन्न इकाई के टुकडे को दर्शाती है क्या आप उचित भिन्न को परिभाषित कर सकते हैं ? तो अपने साथियों के साथ इस पर चर्चा कीजिए।

5.3.1 अनुचित भिन्न को मिश्रित भिन्न के रूप में दर्शाना

अनुचित भिन्न को पूर्ण इकाई व उचित भिन्न (इकाई के हिस्से) के योग के रूप में भी दर्शाया जा सकता है, यह मिश्रित भिन्न कहलाती है। जैसे $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ या $1\frac{1}{4}$ (इसे एक सही एक बटा चार पढ़ते हैं)

उदाहरण 1 अनुचित भिन्न $\frac{7}{3}$ को चित्र द्वारा दर्शाइए व मिश्रित भिन्न के रूप में भी लिखिए।

हल भिन्न $\frac{7}{3}$ को अंश/हर के रूप में देखने पर, हर 3 है अतः हमें एक इकाई के तीन बराबर टुकड़े करने है। अंश 7 है अतः 7 टुकड़े रंगने हैं इसके लिए हमें तीन इकाईयाँ लेकर उनमें 7 हिस्से रंगने होंगे।



$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

अतः अनुचित भिन्न $\frac{7}{3}$ का मिश्रित रूप हुआ

$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

इसे सात बटा तीन व दो सही एक बटा तीन पढ़ते हैं।

अनुचित से मिश्र भिन्न में बदलाव

3) 7(2
-6
1

$= 2\frac{1}{3}$

= भागफल $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

रश्मि ने खाखरे ● के कुछ टुकड़े रखे हैं, इन्हें देखकर भिन्न रूप में लिखिए तथा बताइए कौनसे उचित भिन्न के रूप में तथा कौनसे अनुचित भिन्न के रूप में है।

	$\frac{1}{4}$	उचित
◗		
◗◗		
◗◗◗		
◗◗◗◗		
◗◗◗◗◗		
◗◗◗◗◗◗		
◗◗◗◗◗◗◗		

www.rajteachers.com

उदाहरण 2 निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{19}{4}$ (ii) $\frac{23}{6}$

हल (i) $\frac{19}{4}$

$$\begin{array}{r} 4)19(4 \\ -16 \\ \hline 3 \end{array}$$

भाजक = 4
भागफल = 4
शेषफल = 3

अतः $\frac{19}{4}$ = 4 पूर्ण इकाई व $\frac{3}{4}$ या $4\frac{3}{4}$

हल (ii) $\frac{23}{6}$

$$\begin{array}{r} 6)23(3 \\ -18 \\ \hline 5 \end{array}$$

भाजक = 6
भागफल = 3
शेषफल = 5

अतः $\frac{23}{6}$ = 3 पूर्ण इकाई व $\frac{5}{6}$ या $3\frac{5}{6}$

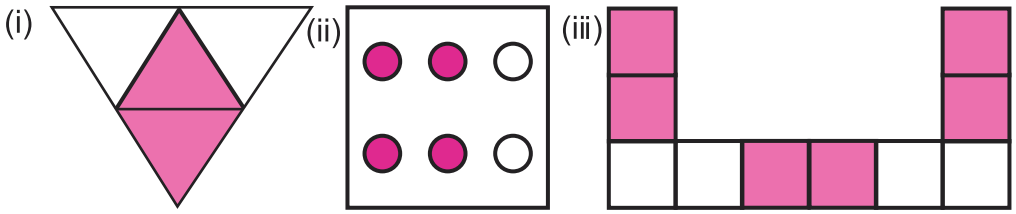
करो और सीखो

निम्न मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्नों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $3\frac{2}{3}$ (ii) $7\frac{1}{9}$

प्रश्नावली 5.1

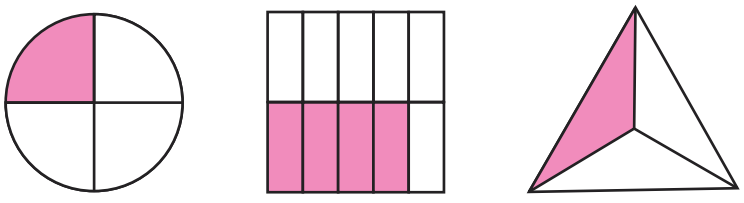
1. छायांकित भाग को दर्शाने वाली भिन्न लिखिए



2. दी गई भिन्नों को चित्र द्वारा दर्शाइए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{5}{4}$ (iii) $\frac{3}{6}$ (iv) $2\frac{2}{5}$

3. 35 मिनट एक घंटे की कौनसी भिन्न है ?
4. 1 से 15 तक की सम संख्याएँ इसकी कितनी भिन्न को बताती है।
5. नीचे दी गई आकृतियों में बिना रंगा भाग कितनी भिन्न को दर्शाता है।



(i) (ii) (iii)

www.rajteachers.com

6. संख्या रेखा पर निम्न भिन्नों को दर्शाइए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{8}{3}$

उदाहरण



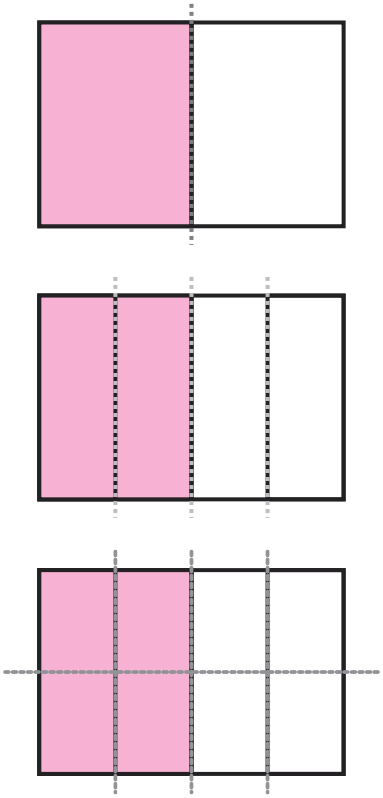
7. निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{20}{3}$ (ii) $\frac{11}{5}$ (iii) $\frac{19}{6}$

8. निम्नलिखित को अनुचित (विषम) भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $7\frac{2}{3}$ (ii) $5\frac{3}{4}$ (iii) $4\frac{1}{2}$

5.4 समान या तुल्य भिन्न



जानवी और देवांश ने भिन्नों को चित्रों से दर्शाना सीख लिया है। तब उनकी शिक्षिका ने एक कागज लेकर उसे आधा मोड़ा और पूछा –

शिक्षिका – इसका एक हिस्सा कितनी भिन्न को दर्शाता है?

जानवी – $\frac{1}{2}$ (एक बटा दो)

शिक्षिका – चलो हम इसके एक हिस्से को रंग देते हैं। अब इसे दो बार मोड़कर, खोलते हैं। अब रंगा हुआ हिस्सा कितनी भिन्न को दर्शा रहा है।

देवांश – कागज के 4 समान हिस्से हुए ओर 2 रंगे हुए हैं, तो यह $\frac{2}{4}$ को दर्शाता है।

जानवी – यहाँ $\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{4}$ तो कागज के समान रंगे हिस्सो को ही दर्शा रहे हैं।

शिक्षिका – जानवी तुमने ठीक कहा, ऐसी भिन्न जो समान हिस्सों को दर्शाती है, समान या तुल्य भिन्न कहलाती है। इन्हें इस प्रकार लिखते है।

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

इस कागज को तीन बार मोड़ने पर रंगा हुआ हिस्सा $\frac{4}{8}$ दर्शाता है।

गतिविधि – तुम भी अपने साथी के साथ एक कागज लेकर उसे आधा रंगो और अलग–अलग तरीकों से मोड़कर रंगे हुए भाग द्वारा दर्शाती भिन्न बनाओ। पर ध्यान रहे, मोड़ते समय सब हिस्से समान होने चाहिए।

देवांश – मैं बिना कागज को मोड़े भी तुल्य भिन्न बता सकता हूँ।

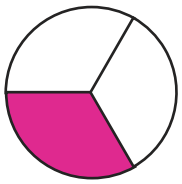
$\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{2} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{8}$

www.rajteachers.com

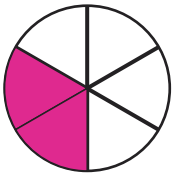
शिक्षिका – देवांश तुमने ठीक पैटर्न पकड़ा, किसी भी भिन्न के अंश व हर को समान संख्या से गुणा या भाग कर हम **तुल्य भिन्न** बना सकते हैं। कुछ भिन्नों जैसे $\frac{12}{16}$ की तुल्य भिन्न भाग से भी निकाली जा सकती है।

इन चित्रों से भी तुल्य भिन्नों को समझो।

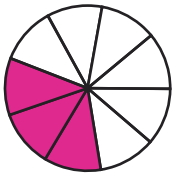
क्या सभी चित्रों में इकाई के रंगे गए भाग समान हैं ? तो यह भी तुल्य भिन्न हुई।



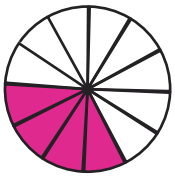
$\frac{1}{3}$



$\frac{2}{6}$



$\frac{3}{9}$



$\frac{4}{12}$

उदाहरण 3 भिन्न $\frac{1}{4}$ की तुल्य भिन्न बताइए।

हल $\frac{1}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{8}$, $\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}$

अर्थात् भिन्न $\frac{1}{4}$ की तुल्य भिन्न –

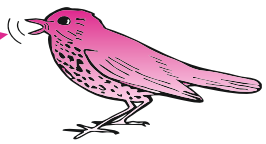
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

उदाहरण 4 $\frac{3}{6}$ की तीन तुल्य भिन्न बनाइए।

हल $\frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$, $\frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12}$, $\frac{3 \times 3}{6 \times 3} = \frac{9}{18}$

हम $\frac{3}{6}$ की तुल्य भिन्न $\frac{1}{2}$ से भी $\frac{3}{6}$ की तुल्य भिन्न बना सकते हैं।

तुल्य भिन्नों के सरल रूप वह है जिसमें अंश व हर आपस में सहअभाज्य हो जैसे $\frac{8}{14}$ का सरल रूप $\frac{4}{7}$ जहाँ 4 व 7 आपस में सहअभाज्य है।



उदाहरण 5 क्या $\frac{3}{4}$ और $\frac{6}{9}$ तुल्य भिन्न है जाँचिए।

हल तरीका 1 $\frac{3}{4}$ भिन्न का सरल रूप है चूंकि 3 व 4 में 1 के अलावा किसी संख्या का भाग नहीं जाता है। $\frac{6}{9}$ का सरल रूप $\frac{2}{3}$ (3 से अंश व हर में भाग देने पर) $\frac{3}{4}$ व $\frac{2}{3}$ समान सरल भिन्न नहीं हैं।

अतः $\frac{3}{4}$ व $\frac{6}{9}$ तुल्य भिन्न नहीं हैं।

तरीका 2 –

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$

अतः $\frac{3}{4}$ की कोई तुल्य भिन्न $\frac{6}{9}$ नहीं होती अतः $\frac{3}{4}$ व $\frac{6}{9}$ तुल्य भिन्न नहीं है।

www.rajteachers.com

करो और सीखो

1. दी गई भिन्नों की तीन–तीन तुल्य भिन्न बनाइए।

   (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{2}{7}$

2. जाँच कीजिए इनमें से कौन–कौन से तुल्य भिन्न हैं ?

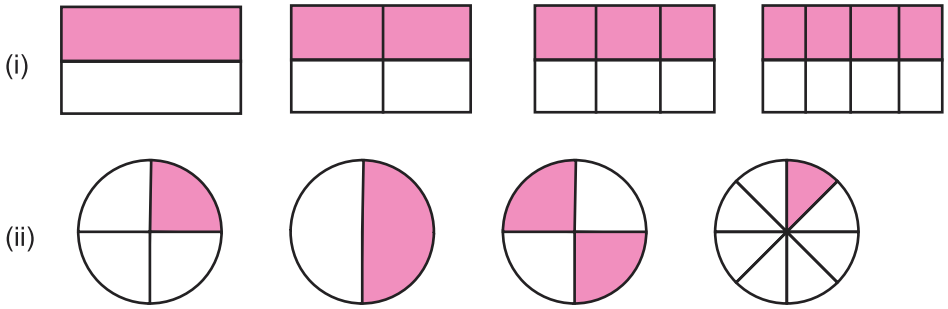
   (i) $\frac{5}{10}$ व $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ व $\frac{11}{13}$

ऐसी सभी भिन्नें जिनके अंश चाहे जो भी हो, पर हर समान होते हैं उन्हें समान भिन्न कहते हैं जैसे $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}$ आदि। याद रहे कोई समान भिन्न तुल्य नहीं होती सोचिए! क्यों?



प्रश्नावली 5.2

1. प्रत्येक चित्र में छायांकित भागों के लिए भिन्न लिखिए क्या ये सभी तुल्य भिन्न हैं ?



2. निम्नलिखित में से प्रत्येक खाली बॉक्स को सही संख्या से प्रतिस्थापित कीजिए।

   (i) $\frac{3}{7} = \frac{6}{\square}$ (ii) $\frac{8}{6} = \frac{4}{\square}$ (iii) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{20}$ (iv) $\frac{100}{10} = \frac{10}{\square}$ (v) $\frac{18}{24} = \frac{\square}{4}$

3. $\frac{3}{4}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका –

   (i) हर 24 (ii) अंश 15 (iii) हर 32 (iv) अंश 9

4. निम्न भिन्नों को सरलतम रूप में बदलिए।

   (i) $\frac{15}{27}$ (ii) $\frac{84}{98}$ (iii) $\frac{21}{49}$ (iv) $\frac{6}{72}$

www.rajteachers.com

5. तुल्य भिन्नों का मिलान कीजिए।

(i) $\frac{25}{40}$	(a) $\frac{30}{36}$
(ii) $\frac{250}{100}$	(b) $\frac{8}{7}$
(iii) $\frac{180}{200}$	(c) $\frac{25}{5}$
(iv) $\frac{2}{3}$	(d) $\frac{5}{8}$
(v) $\frac{9}{13}$	(e) $\frac{27}{39}$
(vi) $\frac{500}{100}$	(f) $\frac{5}{2}$
(vii) $\frac{3}{4}$	(g) $\frac{100}{150}$
(viii) $\frac{16}{14}$	(h) $\frac{9}{10}$
(ix) $\frac{1}{2}$	(i) $\frac{600}{800}$
(x) $\frac{5}{6}$	(j) $\frac{3}{6}$

5.5 भिन्नों की तुलना

क्या भिन्नों की तुलना आप सामान्य संख्याओं 18, 81, 28 की तरह कर सकते हैं ?

आपने संख्याओं की तुलना में बाएँ से दाएँ अंकों की तुलना कर छोटी–बड़ी संख्याओं का पता लगाया है जैसे 526, 702 से छोटी है। भिन्नों की तुलना के लिए क्या ऐसे नियम बनाए जा सकते हैं? चलिए देखते हैं।

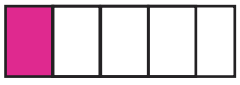
5.5.1 समान अंश वाली भिन्न संख्याओं की तुलना

निम्नलिखित भिन्नों पर विचार कीजिए।

$$\frac{1}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{5},\ 2\frac{1}{4},\ 3\frac{3}{4},\ \frac{1}{5}$$

इन भिन्नों में से $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ को इकाई भिन्न कहते हैं, क्योंकि यह इकाई के कुल हिस्सों में से एक हिस्से को दर्शाती है।

$\frac{1}{3}$ 

$\frac{1}{5}$ 

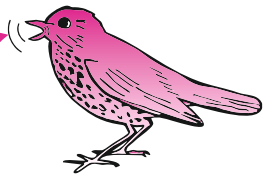
चित्र देखकर बताओ $\frac{1}{3}$ व $\frac{1}{5}$ में कौनसी भिन्न छोटी है ?

इसी प्रकार इकाई भिन्न $\frac{1}{4}$ व $\frac{1}{7}$ में से बड़ी भिन्न कौनसी हैं ?

www.rajteachers.com

$\frac{1}{4}$ अर्थात् 1 इकाई के 4 हिस्सों में से एक हिस्सा
$\frac{1}{7}$ अर्थात् 1 इकाई के 7 हिस्सों में से एक हिस्सा। अतः भिन्न $\frac{1}{7}$ छोटी है $\frac{1}{4}$ से
क्या आप इकाई भिन्नों की तुलना के लिए कोई नियम बना सकते हैं?

दो भिन्नों के अंश समान हो तो दोनों भिन्नों में छोटे हर वाली भिन्न बड़ी होती है।



उदाहरण 6 $\frac{3}{5}$ व $\frac{3}{7}$ में कौनसी भिन्न बड़ी है?

हल यहाँ $\frac{3}{5}$ की इकाई भिन्न = $\frac{1}{5}$

तथा $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$ की इकाई भिन्न है।

हम जानते है कि $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ से बड़ी भिन्न है।

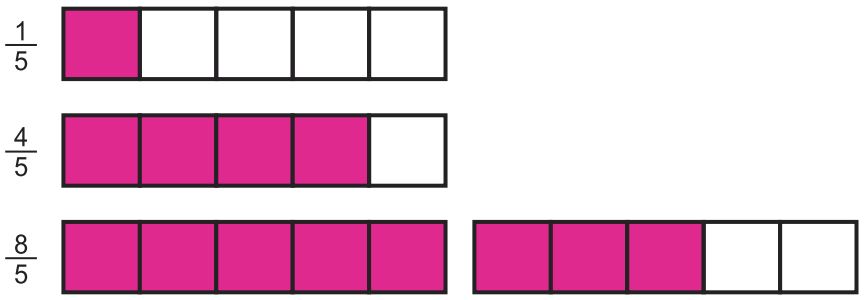
अतः $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$

करो और सीखो

1. एक केक का $\frac{1}{5}$ वाँ हिस्सा डोली व $\frac{1}{7}$ वाँ हिस्सा टीनू को मिलता है। तो किसको ज्यादा केक मिला?
2. कौनसी भिन्न बड़ी है?
   (i) $\frac{1}{3}$ व $\frac{1}{5}$ में से (ii) $\frac{2}{5}$ व $\frac{2}{7}$ में से

5.5.2 समान हर वाली भिन्न संख्याओं की तुलना

$\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$ समान हर वाली भिन्न संख्याएँ हैं। इन भिन्नों का सबसे छोटा हिस्सा समान है।



ऊपर बने चित्रों से हम कह सकते हैं कि समान हर वाली भिन्नों में जिस भिन्न का अंश बड़ा हो वह भिन्न बड़ी होती है।

अतः $\frac{8}{5}$ बड़ी है $\frac{4}{5}$ व $\frac{1}{5}$ से ठीक इसी प्रकार $\frac{4}{5}$ बड़ी है $\frac{1}{5}$ से।

www.rajteachers.com

बड़े से छोटे क्रम में रखने पर $\frac{8}{5} > \frac{4}{5} > \frac{1}{5}$ इसे अवरोही क्रम कहते हैं।

छोटे से बड़े क्रम में रखने पर $\frac{1}{5} < \frac{4}{5} < \frac{8}{5}$ इसे आरोही क्रम कहते हैं।

करो और सीखो

1. निम्नलिखित भिन्नों को आरोही व अवरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{6}{7}$

(ii) $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{8}{13}$

5.5.3 ऐसी भिन्नों की तुलना जिनके अंश व हर दोनों अलग–अलग हों

मान लीजिए आप $\frac{2}{3}$ व $\frac{3}{4}$ की तुलना करना चाहते हैं तो हम पहले इनकी तुल्य भिन्न बनाते हैं –

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \quad \text{तथा} \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$$

$\frac{2}{3}$ व $\frac{3}{4}$ में समान हर 12 वाली तुल्य भिन्न क्रमशः $\frac{8}{12}$ व $\frac{9}{12}$ है

अतः $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ व $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ में $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ या $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

उदाहरण 7 $\frac{3}{4}$ व $\frac{5}{8}$ में बड़ी भिन्न कौनसी है।

हल ये असमान अंश व हर वाली भिन्न संख्याएँ है। आइए इनकी तुल्य भिन्न निकालते हैं।
समान हर वाली तुल्य भिन्न है।

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \frac{21}{35} = \frac{24}{40} = \frac{27}{45}$$

$$\text{तथा} \quad \frac{5}{8} = \frac{10}{16} = \frac{15}{24} = \frac{20}{32} = \frac{25}{40} = \frac{30}{48} = \frac{35}{56}$$

समान हर वाली तुल्य भिन्न है

$$\frac{3}{5} = \frac{24}{40} \quad \text{तथा} \quad \frac{5}{8} = \frac{25}{40}$$

चूकि $\frac{25}{40} > \frac{24}{40}$ है अतः $\frac{5}{8} > \frac{3}{5}$ है।

सोचो अगर बड़ी असमान भिन्नों की तुलना करनी हो तो तुल्य भिन्न द्वारा हल करना कठिन पड़ेगा इन स्थितियों में सार्व गुणज द्वारा तुल्य भिन्न सीधे निकालकर, तुलना की जाती है।

www.rajteachers.com

उदाहरण 8 $\frac{7}{8}$ और $\frac{7}{10}$ की तुलना कीजिए।

हल ये असमान हर वाली भिन्न है। $\frac{7}{8}$ व $\frac{7}{10}$ में हर

8 के गुणज 8,16, ...

इस प्रकार 10 के गुणज 10, 20..... इस प्रकार 8 व 10 के पहाड़े में 40 सार्व गुणज है।

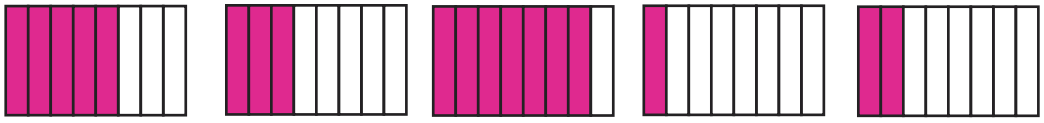
$\frac{7}{8} \times \frac{5}{5} = \frac{35}{40}$; $\frac{7}{10} \times \frac{4}{4} = \frac{28}{40}$

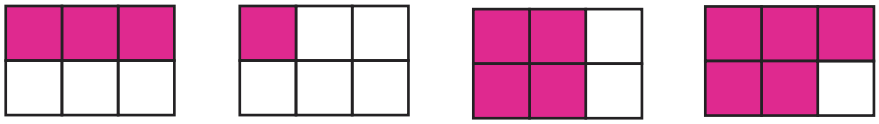
अतः $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ व $\frac{7}{10} = \frac{28}{40}$ है

चूकि $\frac{35}{40} > \frac{28}{40}$ है, इसलिए $\frac{7}{8} > \frac{7}{10}$ है।

प्रश्नावली 5.3

1. प्रत्येक चित्र के लिए भिन्नों को लिखिए और फिर उन्हें अवरोही व आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

(i) 

(ii) 

2. भिन्नों की तुलना कीजिए और उचित चिह्न (<, >, =)लगाइए।

(i) $\frac{5}{6} \square \frac{9}{11}$ (ii) $\frac{3}{4} \square \frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5} \square \frac{3}{7}$

3. निम्नलिखित भिन्न तीन अलग–अलग संख्याएँ निरूपित करती है इन्हें सरलतम रूप में बदलकर उन तीन भिन्नों के समूह में लिखिए।

(i) $\frac{2}{12}$ (ii) $\frac{3}{15}$ (iii) $\frac{8}{50}$ (iv) $\frac{16}{100}$

(v) $\frac{10}{60}$ (vi) $\frac{15}{75}$ (vii) $\frac{18}{90}$ (viii) $\frac{16}{96}$

(ix) $\frac{12}{75}$ (x) $\frac{12}{72}$ (xi) $\frac{10}{50}$ (xii) $\frac{4}{25}$

www.rajteachers.com

4. निम्नलिखित के उत्तर लिखिए और दर्शाइए कि आपने इन्हें कैसे हल किया ?

(i) क्या $\frac{12}{15}$, $\frac{15}{30}$ के बराबर है ?

(ii) क्या $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ के बराबर है ?

(iii) क्या $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{15}$ के बराबर है ?

(iv) क्या $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{9}$ के बराबर है ?

5. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा A में 20 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए और 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा B में 24 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए। किस कक्षा में विद्यार्थियों का अधिक भाग प्रथम श्रेणी में पास हुआ?

6. रोहित कुल 8 रोटियों में से 4 रोटियाँ खाता है। रोहिणी कुल 8 रोटियों का $\frac{1}{4}$ भाग खाती है। बताइए किसने कम खाया?

5.6 भिन्नों की जोड़

हमने भिन्नों को प्रदर्शित करते समय सीखा है कि $\frac{3}{5}$ को हम दो तरह से प्रदर्शित कर सकते हैं।



इकाई में $\frac{3}{5}$



$\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ = $\frac{3}{5}$

अलग–अलग इकाईयों को जोड़ के रूप में $\frac{3}{5}$

क्या हम $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ को भी इसी प्रकार से जोड़ सकते हैं ?



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

जिस प्रकार हमने संख्याओं के जोड़ में देखा है। उदाहरण – 333 + 40 = 373 होता है, 333 में (एक) सबसे छोटी इकाई है व 40 भी 1 को 40 बार जोड़ने पर आता है अतः ऐसी सभी संख्याएँ जिनकी सबसे छोटी इकाई समान हो उन्हें हम आपस में जोड़ सकते हैं।

$\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ में इकाइयाँ असमान है। इन भिन्नों की तुल्य भिन्न बनाने पर

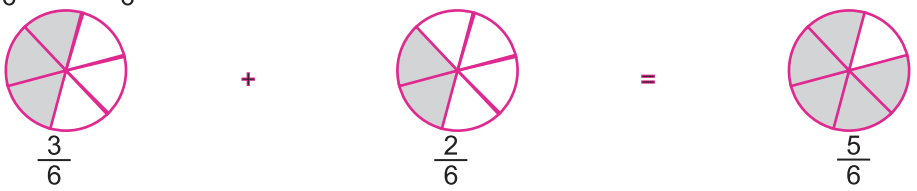
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$ तथा $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

अतः $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ व $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

www.rajteachers.com

समान इकाइयों वाली भिन्नों को दर्शाती है जहाँ $\frac{1}{6}$ समान व सबसे छोटी इकाई है।

$\frac{3}{6}$ व $\frac{2}{6}$ को चित्र द्वारा दर्शाने पर



$\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{6}$

असमान हर वाली भिन्नों को जोड़ने का एक और तरीका (ल.स.प. विधि)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{(1\text{x}3) + (1\text{x}2)}{6}$$

$$= \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

चरण 1. हर 2 व 3 का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) लेते हैं जो कि 6 है।

चरण 2. भिन्न $\frac{1}{2}$ में हर 2 का भाग लघुत्तम 6 में लगाने पर प्राप्त भागफल 3 का गुणा अंश 1 में करते हैं। ठीक इसी प्रकार भिन्न $\frac{1}{3}$ में हर 3 का भाग लघुत्तम 6 में लगाने पर प्राप्त भागफल 2 का गुणा अंश 1 में करते हैं।

चरण 3. प्राप्त गुणनफलों को जोड़ देते हैं।

करो और सीखो

निम्नलिखित को हल कीजिए।

(i) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ (iii) $\frac{4}{5} + \frac{7}{15}$

5.6.1 मिश्रित भिन्नों को जोड़ना

मिश्रित भिन्नों को दो प्रकार से जोडा जा सकता है।

1. मिश्रित भिन्नों के पूर्ण भागों और अनुचित भागों को अलग–अलग जोड़ा जाए।
2. मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्न में बदल कर जोड़ा जाए।

$$2\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5}$$

$$2 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

$$7 + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{3\text{x}5}{4\text{x}5} + \frac{4\text{x}4}{5\text{x}4} \quad (4 \text{ व } 5 \text{ का ल.स. } = 20)$$

$$= \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20}$$

$$= 1 + \frac{11}{20} \quad \left(\frac{31}{20} \text{ को मिश्रित भिन्न में बदलना}\right)$$

पुनः $7 + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 7 + 1 + \frac{11}{20}$

$$= 8 + \frac{11}{20} = 8\frac{11}{20}$$

$\therefore \quad 2\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5} = 8\frac{11}{20}$

मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्न में बदलकर जोड़ना

$$2\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5}$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{29}{5}$$

$$= \frac{11 \text{ x } 5}{4 \text{ x } 5} + \frac{29 \text{ x } 4}{5 \text{ x } 4}$$

$$= \frac{55}{20} + \frac{116}{20} = \frac{171}{20} = 8\frac{11}{20}$$

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 5.4

1. हल कीजिए।

(i) $\frac{5}{19} + \frac{2}{19}$ (ii) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ (iii) $\frac{12}{23} + \frac{27}{23} + \frac{10}{23}$

(iv) $\frac{4}{7} + \frac{3}{14}$ (v) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3}$ (vi) $\frac{17}{6} + \frac{18}{5}$

(vii) $4\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}$ (viii) $5\frac{3}{5} + 3\frac{5}{7}$

2. एक आम का $\frac{1}{4}$ भाग सुनीता को तथा $\frac{1}{4}$ भाग मेरी को मिलता है। दोनों को मिलाकर आम का कितना भाग प्राप्त होता हैं?

3. रेशमा ने $\frac{1}{3}$ मी. और जया ने $\frac{3}{5}$ मी. रिबन खरीदा दोनों ने कुल कितना रिबन खरीदा?

4. रमेश ने अपने घर से स्कूल पहुँचने के लिए $4\frac{1}{4}$ किमी. दूरी बस से तय की तथा $\frac{3}{4}$ किमी. दूरी पैदल तय की उसने घर से स्कूल पहुँचने के लिए कुल कितनी दूरी तय की?

5. अमित पहले दिन $\frac{1}{2}$ ली. दूसरे दिन $\frac{3}{4}$ ली. और तीसरे दिन $1\frac{1}{4}$ ली. दूध लेता है। बताइए तीनों दिन मिलाकर उसने कितना दूध लिया?

6. देवांश ने अपने कमरे की दीवार के $\frac{2}{3}$ भाग पर पेंट किया, उसकी बहन जानवी ने उसकी सहायता की और उस दीवार के $\frac{1}{3}$ भाग पर पेंट किया, बताइए उन दोनों ने मिलकर कितना पेंट किया ?

5.7 भिन्नों को घटाना

भिन्नों को घटाने के लिए भी उन्हीं तरीकों का प्रयोग करेंगे जो हमने भिन्नों को जोड़ने के लिए प्रयोग में लिए हैं।

(i) $\frac{7}{8}$ में से $\frac{5}{8}$ घटाइए।

यहाँ $\frac{7}{8}$ व $\frac{5}{8}$ के हर समान है अतः अंशों को घटाकर हर को वहीं रखेंगे।

अतः $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{7-5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

(ii) $\frac{8}{6}$ में से $\frac{2}{5}$ घटाइए।

अब $\frac{8}{6}$ व $\frac{2}{5}$ के हर असमान है अतः इन भिन्नों की समान हर वाली तुल्य भिन्न ज्ञात करेंगे।

$\frac{8}{6} = \frac{8 \times 5}{6 \times 5} = \frac{40}{30}$, $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{12}{30}$

$\frac{40}{30} - \frac{12}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

अतः $\frac{8}{6} - \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$

(iii) $7\frac{1}{6} - 5\frac{2}{5}$ को हल कीजिए।

ल.स. विधि

$\frac{8}{6} - \frac{2}{5}$ **हर 6 व 5 का** L.C.M. 30 **है।**

$= \frac{(8\times5) - (2\times6)}{30}$

$= \frac{40 - 12}{30} = \frac{28}{30}$

$\frac{28}{30}$ **का सरलरूप** $\frac{14}{15}$

www.rajteachers.com

मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्न में बदल कर घटाना आसान होता है अतः हम यहाँ केवल इसी प्रकार के घटाने का अध्ययन करेंगे।

$$7\frac{1}{6} = \frac{43}{6}, \quad 5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$$

$$\frac{43}{6} - \frac{21}{4}$$

अब हम दोनों भिन्नों की समान हर वाली तुल्य भिन्न ज्ञात करें उन्हे घटाएँ ?

$$\frac{43 \times 2}{6 \times 2} - \frac{21 \times 3}{4 \times 3}$$

$$\frac{86}{12} - \frac{63}{12}$$

$$= \frac{86-63}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$$

अतः $7\frac{1}{6} - 5\frac{1}{4} = 1\frac{11}{12}$

सबसे पहले हम मिश्रित भिन्न को अनुचित भिन्न में बदलेंगे।
अब हम दोनों भिन्नों की समान हर वाली तुल्य भिन्न ज्ञात कर उन्हें घटाएँगे।

प्रश्नावली 5.5

1. हल कीजिए

(i) $\frac{6}{5} - \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{4}{5} - \frac{3}{7}$

(iii) $4\frac{3}{2} - 2\frac{1}{5}$ (iv) $8\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$

(v) $\frac{17}{6} - \frac{9}{4}$ (vi) $\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right)$

2. हीरा ने $\frac{3}{7}$ ली. दूध में से $\frac{1}{4}$ ली. दूध भावना को दिया। उसके पास कितने लीटर दूध शेष रहा ?
3. एक लकड़ी के टुकड़े की लम्बाई $\frac{9}{10}$ मी. है इसमें से $\frac{2}{5}$ मी. लम्बाई का टुकड़ा काट लिया है। बचे टुकड़े की लम्बाई क्या है ?
4. अंशुल 1 गिलास पानी में से $\frac{2}{3}$ भाग पानी पी जाता है, तो बताइए गिलास में कितना पानी शेष बचता है ?
5. सुनील $5\frac{1}{2}$ किग्रा. आम तथा विजय $3\frac{4}{5}$ किग्रा. आम खरीदता है। बताइए सुनील ने कितने किग्रा. आम अधिक खरीदे।

www.rajteachers.com

6. नेहा ने एक दौड़ $3\frac{1}{2}$ मिनट में पूरी की तथा गीता ने $\frac{13}{4}$ मिनट में। बताइए किसने कम समय में दौड़ पूरी की और उसे कितना समय कम लगा ?
7. निम्नलिखित योग व्यवकलन तालिका पूरी कीजिए।

(i)

⊖ \ ⊕			
	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	

(ii)

⊖ \ ⊕			
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	

हमने सीखा

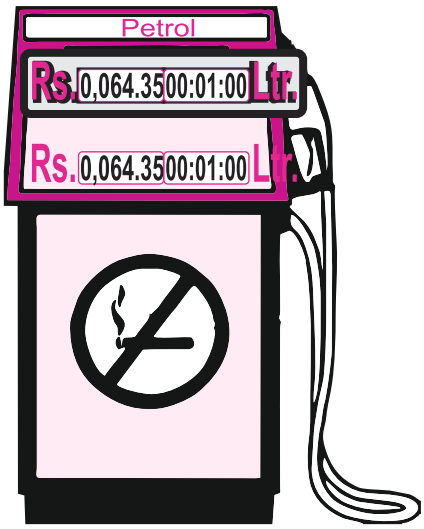
1. भिन्न एक ऐसी संख्या है जो एक पूर्ण के एक भाग को निरूपित करती है या संख्या रेखा पर संक्रियाओं को निरूपित करती है। पूर्ण एक अकेली वस्तु भी हो सकती है और वस्तुओं का समूह भी। किसी स्थिति में गिने हुए भागों को भिन्न में व्यक्त करने के लिए यह आवश्यक है कि उसके सभी भाग बराबर हो।
2. भिन्न $\frac{5}{7}$ में 5 अंश तथा 7 भिन्न का हर कहलाता है।
3. भिन्नों को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है। प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या रेखा का एक निश्चित बिंदु होता है।
4. एक उचित भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है और अनुचित भिन्न में अंश हमेशा हर से बड़ा होता है। अनुचित भिन्न को एक पूर्ण और एक भाग के रूप में भी लिखा जा सकता है। इस स्थिति में यह भिन्न मिश्रित में बदल जाती है।
5. दो भिन्न तुल्य भिन्न कहलाती है यदि वे समान मात्रा को निरूपित करती हों। प्रत्येक उचित या अनुचित भिन्न की अनेक तुल्य भिन्न होती है। एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न निकालने के लिए हम भिन्न के अंश तथा हर दोनों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग कर सकते हैं।
6. एक भिन्न अपने सरलतम रूप (न्यूनतम) में होती है। उसके अंश तथा हर में 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो।

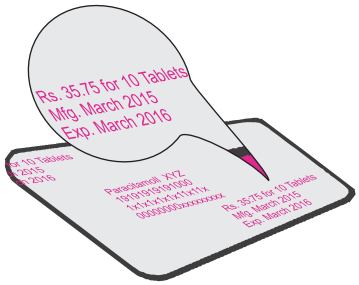
www.rajteachers.com

अध्याय 6

दशमलव संख्याएँ

6.1 आपने दवाई, पेट्रोल, रसोई गैस की कीमत पर ध्यान दिया होगा। दिए गए चित्र में दवाई की कीमत 35.75 रूपये हैं जिसका अर्थ 35 रू 75 पैसे होता है। इसी प्रकार पैट्रोल की कीमत 64.35 रूपये है जिसका अर्थ 64 रूपये 35 पैसे है। 35.75 रू व 64.35 रूपये में बिंदु दशमलव को दर्शाता है, यहाँ हम दशमलव के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे।

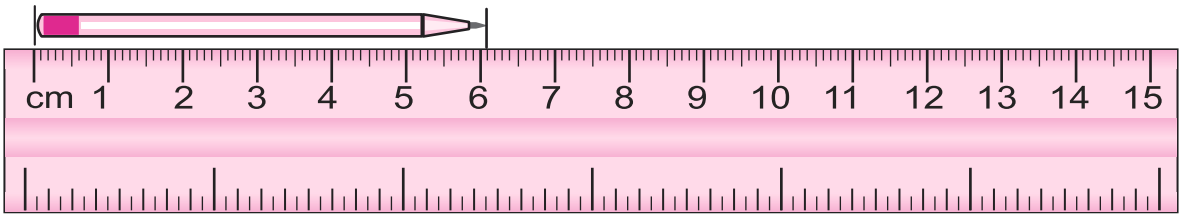




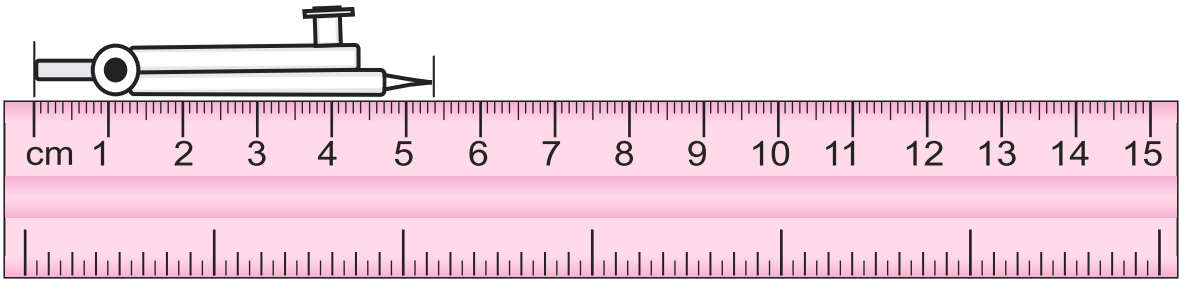
6.1.1 दशमलव संख्याएँ

बताओ राम की पेंसिल की लम्बाई कितनी हैं?

..... सेमी.



रहमान के परकार की लम्बाई कितनी है?



इस चित्र में परकार की लम्बाई 5 सेमी. से कुछ अधिक किंतु 6 सेमी. से कम है। आप इस परकार की लम्बाई कैसे मालूम करोगे?



www.rajteachers.com

करो और सीखो

आप भी अपने बैग में से पेंसिल, रबड़ व अन्य वस्तुओं को स्केल से नापिए और सारणी को भरिए।

क्र.सं.	वस्तुएँ	लम्बाई
1		
2		
3		
4		
5		
6		

आपने परकार को मापते समय देखा है कि उसकी लम्बाई 5 सेमी से कुछ अधिक है तब हमने 1 सेमी. को 10 बराबर भागों में बाँटा और उसका एक भाग 1 मिमी है, अब यदि मिमी को सेमी में दर्शाना हो तो उसे दशमलव के दाईं और लिखते हैं।

दशमलव बिंदु के दाईं ओर के प्रथम स्थान का मूल्य 1 का दसवाँ भाग यानी $\frac{1}{10}$ होता है इसे दशांश भी कहते है।

परकार को मापते समय दशांश के 3 समान भाग हो रहे है। अतः इसे हम 5.3 सेमी लिखेंगे।

6.2 दशमलव में स्थानीय मान

किसी भी संख्या में अंकों का मान उसके स्थानीय मान पर निर्भर करता है।

325 में 3, सैंकडे वाले स्थान पर अतः 3 X 100 = 300

2 दहाई वाले स्थान पर अतः 2 X 10 = 20

तथा 5 इकाई वाले स्थान पर है अतः 5 X 1 = 5

इसी प्रकार 523 में अंकों के स्थान परिवर्तन से संख्या का मान हमें अलग प्राप्त होता है।

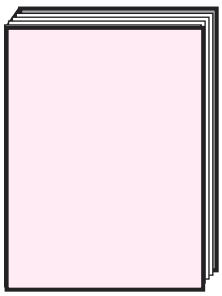
यहाँ 5 का स्थानीयमान है = ...

2 का स्थानीयमान है = ...

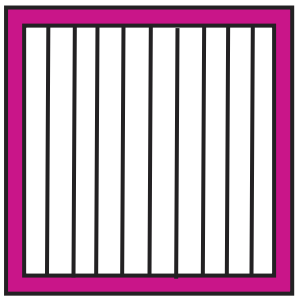
3 का स्थानीयमान है = ...

संख्याओं में बाईं और से दाईं और जाने पर स्थानीय मान $\frac{1}{10}$ भाग होता जाता है।





100
(सैंकड़ा)



10
(दहाई)



1
(इकाई)



$\frac{1}{10}$ (दशांश)

अब हम कुछ दशमलव संख्याओं के अंकों का स्थानीय मान लिखते हैं।

दशमलव संख्या	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश
124.5	1	2	4	5
315.5	.....	.....	.....	.....
402.1	.....	.....	.....	.....



www.rajteachers.com

करो और सीखो

दी गई संख्याओं में अंकों का स्थानीय मान लिखिए।

(i) 123.4 (ii) 111

6.3 दशमलव संख्याओं का विस्तार रूप

$325.4 = 300 + 20 + 5 + \frac{4}{10}$

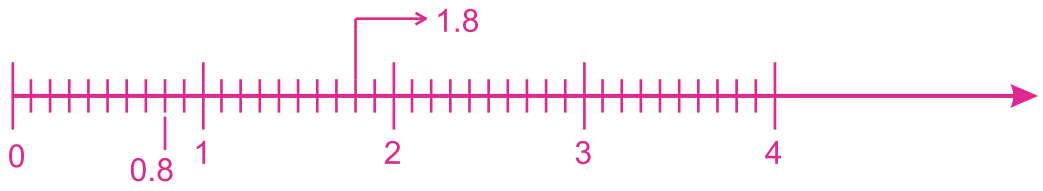
$34.7 = 30 + 4 + \frac{7}{10}$

दशमलव संख्याओं में दशमलव बिन्दु हमेशा इकाई और दशांश के बीच लगाया जाता है।

6.4 संख्या रेखा पर निरूपण

हमने भिन्नों का संख्या रेखा पर निरूपण सीखा है। अब हम दशमलव को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखेंगे। 0.8 का अर्थ 1 का 8 दशांश या $\frac{8}{10}$ है।

अतः यह 0 व 1 के बीच होगा, हम यह भी जानते हैं कि दशमलव के दाएँ और का भाग दशांश $\frac{1}{10}$ स्थान दर्शाता है। अतः हम 0 से 1 तक संख्या रेखा को 10 हिस्सों में विभाजित करेंगे।



करो और सीखो

दशमलव संख्या 0.6, 1.3 व 2.5 को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

दशांश का अर्थ दसवाँ हिस्सा होता है।
अतः 1 दशांश $= \frac{1}{10}$
2 दशांश $= \frac{2}{10}$

उदाहरण 1 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) 5 इकाई और 2 दशांश

(ii) 5 दहाई, 3 इकाई और 4 दशांश

हल

(i) 5 इकाई और 2 दशांश अतः $5 + \frac{2}{10} = 5.2$

(ii) 5 दहाई 3 इकाई और 4 दशांश,

यानि $50 + 3 + \frac{4}{10} = 53.4$

www.rajteachers.com

उदाहरण 2 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $40 + \frac{3}{10}$ (ii) $500 + 70 + 4 + \frac{7}{10}$

हल (i) $40 + \frac{3}{10} = 40.3$

(ii) $500 + 70 + 4 + \frac{7}{10} = 574.7$

इसे ऐसे भी समझ सकते हैं

$\frac{40}{1} + \frac{3}{10} = \frac{40 \times 10 + 3 \times 1}{10}$

$\frac{400 + 3}{10} = \frac{403}{10} = 40.3$

भिन्न जिसका हर 10 हो, को दशमलव रूप में आसानी से लिखा जा सकता है।

6.5 दशमलव संख्याओं को भिन्न में बदलना

उदाहरण 3 दशमलव संख्याओं को भिन्न में बदल कर सरल रूप में लिखिए।

(i) 24.4 (ii) 10.5

हल (i) $\frac{24.4}{10}$

$= \frac{2 \times 122}{2 \times 5}$

$= \frac{122}{5}$ सरलतम रूप

24.4 को हम $24 + \frac{4}{10}$ या $\frac{244}{10}$ लिख सकते हैं।

अतः संख्या को दशमलव रूप से भिन्न रूप में बदलने के लिए दशमलव को हटा कर हर में उसके स्थान पर एक व दशमलव के आगे जितने अंक हो उतने शून्य लगाते हैं।

हमने भिन्न संख्याओं में सीखा है कि वह भिन्न संख्याएँ जिनमें अंश व हर सह अभाज्य हैं वह भिन्न का सरल रूप होता है।

(ii) $10.5 = \frac{105}{10} = \frac{21}{2}$ सरलतम रूप

6.6 भिन्नों को दशमलव में बदलना

भिन्नों को दशमलव रूप में लिखने का प्रयास करें जिनका हर 10 से अलग हो–

उदाहरण 4 नीचे दिए गए भिन्नों को दशमलव में बदलिए।

(i) $\frac{9}{5}$ (ii) $\frac{1}{2}$

ऐसी भिन्नों में हम हर को 10 या 10 के गुणज में बदलने के लिए तुल्य भिन्न बनाते हैं। फिर पहले की तरह हर में यदि 10 है तो अंश में दाईं ओर से एक अंक छोड़कर दशमलव और यदि 100 है तो अंश में दाईं और से दो अंक छोड़कर दशमलव लगाते हैं।

(i) $\frac{9}{5}$ का तुल्य भिन्न $= \frac{9}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{18}{10} = 1.8$

(ii) $\frac{1}{2}$ का तुल्य भिन्न $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{10} = 0.5$

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 6.1

1. निम्न के लिए दी गई सारणी में संख्याएँ लिखिए।

(i) 1 दहाई 2 इकाई 3 दशांश

(ii) 1 सैंकड़ा 3 दहाई 7 दशांश

(iii) 2 सैंकड़ा 5 दहाई 1 इकाई 2 दशांश

सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश (1/10)	बनने वाली संख्या

2. निम्न दशमलव संख्याओं का स्थानीय मान सारणी में लिखिए।

(i) 19.4 (ii) 0.5 (iii) 10.9 (iv) 205.9

3. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए।

(i) 7 दशांश (ii) 2 दहाई 4 दशांश

(iii) चौदह दशमलव नौ (iv) छः सौ दशमलव तीन

4. निम्न को दशमलव भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{3}{10}$ (ii) $4+\frac{8}{10}$ (iii) $300 + 50 + 8 + \frac{1}{10}$

(iv) $90+\frac{3}{10}$ (v) $\frac{3}{2}$ (vi) $\frac{2}{5}$ (vii) $4\frac{1}{2}$ (viii) $3\frac{3}{5}$

5. निम्न दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखकर सरलतम रूप में बदलिए।

(i) 0.6 (ii) 2.5 (iii) 2.8

(iv) 13.7 (v) 21.2 (vi) 1.0 (vii) 6.4

6. सेमी. का प्रयोग कर निम्न को दशमलव रूप में बदलिए।

(i) 2 मिमी (ii) 30 मिमी (iii) 116 मिमी

(iv) 5 सेमी 2 मिमी (v) 95 मिमी (vi) 19 सेमी 1 मिमी

7. संख्या रेखा पर किन दो पूर्ण संख्याओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित हैं ? इनमें से कौनसी पूर्ण संख्या दशमलव संख्या के अधिक निकट है ?

(i) 0.5 (ii) 5.3 (iii) 9.0 (iv) 4.9 (v) 3.8

www.rajteachers.com

8. निम्न को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

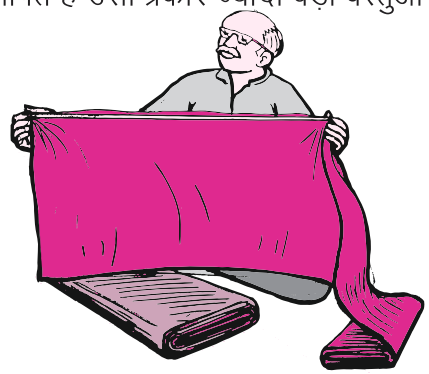
(i) 0.3 (ii) 1.7 (iii) 3.4 (iv) 2.5

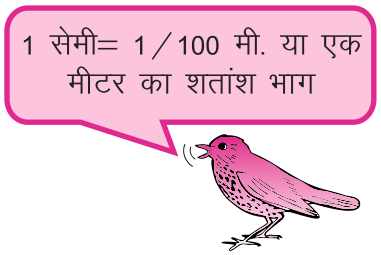
9. तुलसी के हाथ के बालिश्त की लम्बाई 95 मिमी है उसके बालिश्त की लम्बाई सेमी में व्यक्त कीजिए।

10. दीपू का स्केल 6 सेमी का है खेल–खेल में वह 4.4 सेमी से टूट गया, बाकी बचे टुकड़े की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

6.7 शतांश

जिस प्रकार हम छोटी वस्तुओं और दूरी को सेमी व मिमी में मापते है उसी प्रकार ज्यादा बड़ी वस्तुओं को मीटर, सेमी में मापते हैं। आपने छोटी कक्षाओं में मीटर स्केल के बारे में पढ़ा है। 1 मीटर में 100 सेमी होते है। अतः 1 सेमी मीटर का सौंवा भाग होता है। 0 से 1 मीटर के बीच में 100 बराबर दूरी पर निशान होते हैं और प्रत्येक भाग की दूरी 1 सेमी या मीटर का 100 भाग यानी शतांश कहलाती है। (अगर आपको कहीं मीटर स्केल मिले तो उसे देखकर जाँचना) नीलू ने कक्षा की दीवार पर बने बोर्ड को मीटर स्केल से नापा तो पाया कि यह 2 पूरे मीटर और उससे आगे 15 छोटे भाग यानी 15 सेमी है तो हुए 2 मीटर 15 सेमी या 2 मीटर $\frac{15}{100}$ मी इसे दशमलव के रूप में 2.15 मीटर भी लिखते हैं। अतः बोर्ड की लम्बाई हुई 2 मी 15 सेमी या 2.15 मी. इसी प्रकार 5 सेमी को मीटर में दर्शाना हो तो $\frac{5}{100}$ मी या 0.05 मी।





6.8 सहस्रांश

जिस प्रकार दशमलव के दाईं और दूसरा स्थान शतांश होता है उससे आगे शतांश का भी दसवाँ भाग $\left(\frac{1}{10}\right)$ होता है। शतांश का दसवाँ भाग सहस्रांश (हजारवाँ भाग) कहलाता है।

जैसे – 43.125 यहाँ तैतालिस दशमलव एक दो पाँच में 5 शतांश के दसवें भाग को दर्शाता है।

अर्थात् $\frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$ (हजारवाँ भाग)

6.9 दशमलव संख्याओं को पढ़ना

दवाई, पैट्रोल, डॉलर का भाव रूपयों में और ऐसी ही कई अन्य वस्तुओं और परिस्थितियों में आपने दशमलव का प्रयोग होते देखा है, क्या आपको पता है इसे कैसे पढ़ा जाता हैं?

हम 34.25 रू को पढ़ेंगे चौतीस दशमलव दो पाँच रूपये, इसी प्रकार 1 डॉलर का भारतीय मूल्य 64.025 रू है और इसे चौसठ दशमलव शून्य दो पाँच रूपये पढ़ेंगे।

आप भी नीचे दशमलव में लिखी संख्याओं को शब्दों में लिखिए।

1. 45.36 सेमी = ...
2. 325.25 रु. = ...





www.rajteachers.com

उदाहरण 5 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{25}$ (iv) $\frac{8}{1000}$

हल (i) हम जानते हैं कि दशमलव के बाईं और इकाई (1) व दाईं और क्रमशः ($\frac{1}{10}$) दशांश व ($\frac{1}{100}$) शतांश का स्थान होता है। अतः $\frac{3}{5}$ को दशमलव में बदलने के लिए इसके हर को हमें 10 या 100 वाली तुल्य भिन्न में बदलना होगा। अतः

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

इसी प्रकार

(ii) $\frac{3}{4} = \frac{3x25}{4x25} = \frac{75}{100} = 0.75$

(iii) $\frac{1}{25} = \frac{1x4}{25x4} = \frac{4}{100} = 0.04$

(iv) $\frac{8}{1000}$ यहाँ दशांश और शतांश का स्थान शून्य है अतः $\frac{8}{1000}$ को 0.008 लिखते हैं।

यहाँ हर में एक के आगे तीन शून्य हैं अतः भिन्न को दशमलव संख्या में बदलने पर दशमलव के दाईं और तीन अंक आने चाहिए।

उदाहरण 6 दशमलव संख्याओं को भिन्न रूप में लिखिए।

(i) 0.07 (ii) 12.34 (iii) 0.407

हल (i) $0.07 = \frac{7}{100}$

(ii) $12.34 = 12 + \frac{34}{100}$ यहाँ भिन्न $\frac{34}{100}$ का सरल रूप $\frac{17}{50}$ है अतः $12\frac{17}{50}$

(iii) $0.407 = \frac{407}{1000}$

उदाहरण 7 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $500 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ (ii) $7 + \frac{4}{10} + \frac{6}{1000}$

हल (i) $500 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$

$500 + 5 + \frac{29}{100}$

$= 505.29$

हर समान कर जोड़ने पर

$\frac{20}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{20}{100}$

$\frac{20}{100} + \frac{9}{100} = \frac{29}{100}$

www.rajteachers.com

(ii) $7 + \frac{4}{10} + \frac{6}{1000}$

$7 + \frac{406}{1000}$ (यहाँ शतांश के स्थान पर 0 है)

$= 7.406$

$\frac{4}{10} \times \frac{100}{100} = \frac{400}{1000}$

$\frac{400}{1000} + \frac{6}{1000} = \frac{406}{1000}$

6.10 दशमलवों की तुलना

कौनसी संख्या बड़ी है 2.5 या 2.09 ? यहाँ हम देखते हैं कि दोनों संख्याओं के इकाई वाले स्थान समान है। अतः हम दशमलव के दाएँ स्थानों से संख्याओं की तुलना करते हैं।

2.5 में दशांश स्थान पर 5 है अतः $\frac{5}{10}$ जबकि 2.09 में दशांश स्थान पर 0 व शतांश स्थान पर 9 है अतः $\frac{9}{100}$

पहला तरीका :– तुलना के लिए भिन्न समान करते हैं।

$\frac{5}{10} = \frac{5x10}{10x10} = \frac{50}{100}$

अब $\frac{50}{100}$ और $\frac{9}{100}$ में $\frac{50}{100}$ बड़ी भिन्न है। अतः $2.5 > 2.09$

दूसरा तरीका :– जिस प्रकार संख्याओं की तुलना में हम बाईं ओर से अंकों की तुलना करना शुरू करते हैं। इसी तरह हम दशमलव संख्याओं में पहले दशांश फिर शतांश अंक की तुलना करते हैं।

2.5 व 2.09 में दशांश के स्थान पर 2.5 में 5 दशांश व 2.09 में 0 दशांश है। दशांश $5 > 0$ अतः $2.5 > 2.09$ से।

उदाहरण 8 कौनसी संख्या बड़ी है ?

(i) 1 या 0.99

$1 > 0.99$ ∵ इकाई के स्थान पर 1 है जबकि 0.99 में 0 है।

(ii) 3.090 या 3.93

$3.090 = 3 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$

$3.093 = 3 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$

दोनों संख्याएँ 3.09 व 3.093 शतांश स्थान तक समान है पर 3.093 में 3 सहस्त्रांश है जिसके कारण $3.093 > 3.090$

करो और सीखो

निम्न संख्याओं में से बताइए कौनसी संख्या बड़ी है ?

(i) 3.07 और 3.89 (ii) 0.57 व 0.05 (iii) 147.8 व 147.08 (iv) 9.5 व 5.92

www.rajteachers.com

6.11 दशमलव के अनुप्रयोग

उदाहरण 9 महेश के पास 500 ग्राम आलू, 500 ग्राम टमाटर, 250 ग्राम शिमला मिर्च,100 ग्राम अदरक तो उसकी सब्जियाँ कितने किलो ग्राम वजन में हैं?

हल हम जानते हैं कि 1000 ग्राम = 1 किलोग्राम

अतः 500 ग्राम आलू + टमाटर 500 ग्राम + शिमला मिर्च 250 ग्राम + अदरक 100 ग्राम = 1350 ग्राम

इसे किलोग्राम में बदलना है 1000 ग्राम + 350 ग्राम

$= \frac{1000}{1000}$ किग्रा + $\frac{350}{1000}$ किग्रा

अर्थात् 1350 ग्राम = 1 किलो 350 ग्राम = 1.350 किग्रा

उदाहरण 10 0.38 और 0.45 को जोड़िए।

हल

इकाई		दशांश	शतांश
0	.	3	8
+ 0	.	4	5
0	.	8	3

शतांश $\frac{8}{100} + \frac{5}{100}$ =13 शतांश

$\frac{13}{100} = \frac{10+3}{100} = \frac{10}{100} + \frac{3}{100} = \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$

= 1 दशांश + 3 शतांश

अतः दशांश $= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10}$ = 8 दशांश

करो और सीखो

निम्न को जोड़िए

(i) 1.54 + 1.80 (ii) 2.75 + .08

उदाहरण 11 (i) 4.34 में से 1.78 घटाइए। (ii) 2 में से 0.78 घटाइए।

हल

इकाई		दशांश	शतांश
4	.	3	4
1	.	7	8
2	.	5	6

इकाई		दशांश	शतांश
2	.	0	0
0	.	7	8
1	.	2	2

पूर्ण संख्या में से दशमलव संख्या को जोड़ने अथवा घटाने के लिए पूर्ण संख्या के बाद दशमलव लगाकर उतने ही शून्य लगाए जाते हैं, जितने दूसरी संख्या में दशमलव के बाद अंक हो। ध्यान रहे दशमलव के बाद कितने भी शून्य लगाने पर संख्या के मान मे कोई परिवर्तन नही होता।

करो और सीखो

(i) 5.47 में से 1.65 घटाइए। (ii) 8.90 में से 4.07 घटाइए।

उदाहरण 12 पप्पू के घर से स्कूल की दूरी 8 किमी 850 मीटर है वह बस से 6 किमी 500 मी. दूरी तय करता है और शेष पैदल चलता है। वह पैदल कितनी दूरी तय करता है।

हल घर से स्कूल की दूरी = 8.850 किमी

बस द्वारा तय की गई दूरी = 6.500 किमी

अतःपप्पू द्वारा पैदल तय की गई दूरी = 8.850 − 6.500 = 2.350 किमी = 2 किमी 350 मी

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 6.2

1. स्थानीय मान सारणी को देख कर दशमलव रूप में लिखिए।

क्र.सं.	सैंकड़ा 100	दहाई 10	इकाई 1	दशांश $\frac{1}{10}$	शतांश $\frac{1}{100}$	सहस्रांश $\frac{1}{1000}$
(i)	2	3	0	0	5	7
(ii)	0	0	1	3	0	5
(iii)	2	5	3	5	0	5
(iv)	3	4	0	1	2	0
(v)	0	1	3	0	3	0

2. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $23 + \frac{3}{10} + \frac{6}{1000}$ (ii) $\frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000}$

(iii) $137 + \frac{6}{100}$ (iv) $700 + 3 + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000}$

(v) $\frac{3}{10} + \frac{7}{1000}$ (vi) $\frac{1}{10} + \frac{9}{100}$

3. निम्न दशमलव संख्याओं को शब्दों में लिखिए।

(i) 1.20 (ii) 108.56 (iii) 10.756 (iv) 6.01

4. भिन्न बनाकर सरल रूप में लिखिए।

(i) 0.18 (ii) 0.25 (iii) 0.066 (iv) 0.40

5. कौनसी बड़ी है? कारण भी लिखिए।

(i) 0.4 या 0.04 (ii) 3 या 0.7 (iii) 0.999 या 0.19 (iv) 5.64 या 5.603

6. दशमलव का प्रयोग कर रूपयों में बदलिए।

(i) 5 पैसे (ii) 75 पैसे (iii) 80 पैसे (iv) 50 पैसे

7. दशमलव का प्रयोग कर किमी में लिखिए।

(i) 70 किमी 5 मी (ii) 88 मी (iii) 800 मी

8. निम्न को हल कीजिए ।

(i) 0.007 + 8.5 + .008 (ii) 280.69+25.8+8.80

(iii) 0.75 + 10.425+2 (iv) 32.52 + 36.60

(v) 8.28 − 5.25 (vi) 2.29 − 0.95

www.rajteachers.com

9. रवि ने 15 किग्रा 400 ग्राम चावल, 2 किग्रा 20 ग्राम चीनी, 100 किग्रा 850 ग्राम आटा तौला, कुल कितना भार तौला गया ?

10. लिली सायंकाल सैर करने जाती है सोमवार को वह 2 किमी. 100 मी, मंगलवार को 3 किमी. 500 मी. व बुधवार को 2 किमी. 700 मी. चली तो 3 दिन में लिली द्वारा कुल कितनी सैर की गई ?

11. टीना के पास 20 मी 50 सेमी लम्बा कपड़ा है इसमें से उसने 4 मी. 25 सेमी कपड़ा काट लिया। टीना के पास अब कितना कपड़ा शेष बचा ?

12. आकाश 12 किग्रा सब्जी खरीदता है जिसमें से 4 किग्रा 150 ग्राम टमाटर, 5 किग्रा 750 ग्राम प्याज व शेष आलू हैं। आलू का वजन कितना है, बताइए ?

हमने सीखा

1. एक पूरी इकाई के भागों को जानने के लिए हम एक इकाई को खंडों में दर्शाएँगे। एक खण्ड के 10 बराबर भाग करने पर प्रत्येक भाग इस इकाई का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश) होगा। इसे हम 0.1 के रुप में लिख सकते हैं, जो कि दशमलव निरुपण है। इस बिन्दु (.) को हम दशमलव कहते है, जो कि इकाई और दशांश स्थान के अंकों के बीच लगाया जाता है।
2. प्रत्येक भिन्न को दशमलव रुप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक दशमलव संख्या को भी भिन्न रुप में लिखा जा सकता है।
3. एक खण्ड को 100 समान भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग इस इकाई का $\frac{1}{100}$(एक शतांश) भाग है। दशमलव रुप में इसे हम 0.01 लिख सकते हैं।
4. स्थानीय मान सारणी में जैसे–जैसे हम बाएँ से दाएँ की ओर जाते हैं, संख्याओं का स्थानीय मान $\frac{1}{10}$ भाग होता जाता है।
5. दशमलव संख्याओं को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है।
6. दो दशमलव संख्याओं की आपस में तुलना की जा सकती है। तुलना संख्या के पूर्ण भाग (जो कि दशमलव बिन्दु की बाईं ओर के अंक होते हैं) से शुरु की जाती है। यदि पूर्ण भाग समान है जो दशांश स्थान के अंकों की तुलना की जाती है और यदि ये भी समान हो तो अगले अंक (शतांश) को देखें। यह क्रम आगे बढ़ता रहता है।

www.rajteachers.com

अध्याय 7

वैदिक गणित

7.1 अभी तक हमने वैदिक गणित के अन्तर्गत जोड़, बाकी, गुणा के सरल तरीकों को सीखा है। इस अध्याय में हम इन्हीं पदों का विस्तृत अध्ययन करेंगे। जिसमें एकाधिकेन, एक न्यूनेन, पूर्वेण, विचलन, परममित्र अंक, विनकूलम संख्याएँ, विनकूलम संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणा इत्यादि, सूत्र निखिलम् का आधार 10 व 100 का उपयोग करते हुए गुणा व भाग का अध्ययन करेंगे।

7.2 एकाधिकेन

चन्द्रशेखर के पास एक ऐसा जादुई बॉक्स है जिसको सामने वाला साथी यदि कोई संख्या बोलता है तो वह बॉक्स उस बोली गई संख्या से एक अधिक को दर्शाता है।

आनन्द ने जब संख्या 8 बोली तब उस बॉक्स ने 9 बताई।

करण ने जब संख्या 6 बोली तो उस बॉक्स ने संख्या 7 बताई। इस प्रकार एक अंकों की संख्या बोलने पर बॉक्स अगली संख्या बता रहा था लेकिन जब लीलावती ने संख्या 15 बोली तो उस बॉक्स ने संख्या 25 बताई।

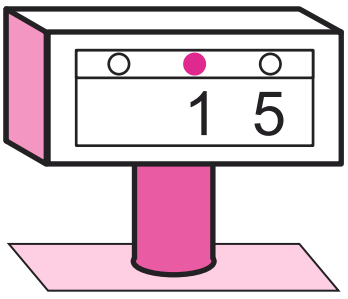
सभी बालक यहाँ विचार करने लगे कि बॉक्स ने 25 क्यों बताया, जबकि 15 से तो एक अधिक 16 होता है।

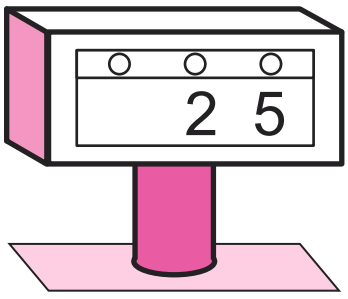
इस तरह से दो अंकों की और भी कई संख्याएँ बोली तो बॉक्स दहाई अंक को एक अधिक बताता था।

बालकों द्वारा इस बॉक्स को ध्यान से देखने पर उन्हें ज्ञात हुआ कि संख्या बोलने पर, उसके ऊपर लगे बिन्दु जिस अंक पर गहरा होता है वह अंक एक अधिक से बनी संख्या बताता है।

अर्थात् गहरे बिन्दु की संख्या को एक अधिक बताता है।

एकाधिक से तात्पर्य एक से अधिक से है जिस अंक को एकाधिक दिखाना है उसे एक गहरे बिन्दु से दर्शाते हैं।





यदि गहरा बिन्दु बॉक्स में लिखी संख्या 15 के अंक 5 पर होता तो बॉक्स संख्या 16 दर्शाता लेकिन अंक 1 पर है अतः 25 दर्शाया गया। इस प्रकार के कुछ अभ्यास दिये गए हैं। जिन्हें आप भी बॉक्स में रख कर देखें और रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

www.rajteachers.com

एकाधिक = एक अधिक करना

3 का एकाधिक = $\dot{3}$ = 4

7 का एकाधिक = $\dot{7}$ = 8

9 का एकाधिक = $\dot{9}$ = 10

12 का एकाधिक = $1\dot{2}$ = 13

28 का एकाधिक = $2\dot{8}$ = 29

32 का एकाधिक = $3\dot{2}$ = 33 (इकाई के अंक 2 का एक अधिक)

14 में अंक 1 का एकाधिक = $\dot{1}4$ = 24 (दहाई के अंक 1 का एक अधिक = 2)

25 में अंक 2 का एकाधिक = $\dot{2}5$ = 35

98 में अंक 9 का एकाधिक = $\dot{9}8$ = 108 (9 का एकाधिक = $\dot{9}$ = 10)

संख्या	एकाधिकसंकेत	नवीनसंख्या
4	$\dot{4}$	5
6	.....	.....
11	$1\dot{1}$	12
18	....	....
96	....	....
125 में अंक 2 का	$1\dot{2}5$	135
354 में अंक 3 का	.....	....
648 में अंक 8 का	.....	.....
985 में अंक 9 का	....	....
1459 में अंक 1 का	....	....

7.2.1 पूर्वेण

वैदिक गणित में एकाधिक के साथ–साथ एकाधिकेन पूर्वेण शब्द भी उपयोग में होता है अर्थात् पूर्वेण का तात्पर्य 'से पहले' यानि 'से पहले अंक'

13 में 3 का पूर्वेण अंक = 1 3 से पहले का अंक (दहाई स्थान वाला)–1

59 में 9 का पूर्वेण अंक = 5 9 से पहले का अंक (दहाई स्थान वाला)–5

286 में 8 का पूर्वेण अंक = 2 8 से पहले का अंक (सैंकड़े के स्थान वाला)–2

435 में 4 का पूर्वेण अंक = 0 4 से पहले का अंक (हजार स्थान वाला)–0

www.rajteachers.com

अतः संख्या में जिस अंक का पूर्वेण पूछा जाए उसके पहले वाला जैसे 6 का एकाधिक पूर्वेण 0̇6 एवं नवीन संख्या 16 होगी। अंक 6 का पूर्वेण अंक 0 होगा। **(जिस अंक का कोई पूर्वेण नहीं है तब शून्य लेवें)**

संख्या	एकाधिकपूर्वेण	नवीन संख्या
7	0̇7	17
9	.....	
16 में अंक 6 का	1̇6	26
42 में अंक 2 का	.....	.....
96 में अंक 9 का	0̇96	196
87 में अंक 8 का	.....	.....
134 में अंक 3 का	1̇34	.....
273 में अंक 7 का	.....	.....
819 में अंक 1 का	.....	.....
897 में अंक 8 का	.....	.....

7.3 एकाधिकेन पूर्वेण से योग

एकाधिकेन पूर्वेण से योगफल ज्ञात करना सीखेंगे

उदाहरण 1

$$\begin{array}{r} 78 \\ \dot{0}\dot{6}5 \\ \hline 143 \end{array}$$

संकेत

(1) इकाई के अंकों का योग 8+5 = 13 अतः 5 के पूर्वेण अंक 6 पर एकाधिक चिह्न लगाएँगे।

(2) जबकि शेष 3 को योगफल के नीचे लगाएँगे। (इकाई के स्थान पर)

(3) दहाई के अंकों का योग में 7+$\dot{6}$ = 14 (जहाँ $\dot{6}$ = 7 है)

(4) अतः 6 के पूर्वेण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न लगावें (जिस संख्या के पूर्वेण अंक नहीं लिखा होता है उसके पूर्व में शून्य लगा दिया जाता है)

(5) शेषफल 4 लिखे योग के स्थान पर (दहाई के स्थान)

(6) $\dot{0}$ = 1 सैंकड़े के स्थान पर लिखेंगे।

www.rajteachers.com

उदाहरण 2

$$\begin{array}{r} 98 \\ \dot{0}6\dot{9} \\ \dot{0}8\dot{5} \\ \hline 252 \end{array}$$

संकेत

(1) इकाई के अंकों का योग 8+9 = 17 अतः 9 के पूर्वेण अंक 6 पर एकाधिक चिह्न

(2) शेष 7+5 = 12 अतः 5 के पूर्वेण अंक 8 पर एकाधिक चिह्न

(3) शेष 2 को योग के स्थान पर (इकाई में)

(4) दहाई के अंकों के योग में 9+$\dot{6}$ = 16 अतः 6 के पूर्वेण 0 (शून्य) पर एकाधिक चिह्न

(5) शेषफल 6+8$\dot{}$ = 15 अतः 8 के पूर्वेण अंक 0 (शून्य) पर एकाधिक चिह्न लगाएँ एवं शेष 5 को योग के स्थान पर

(6) अंत में $\dot{0}$+$\dot{0}$ = 2 सैंकड़े के स्थान पर

उदाहरण 3

रुपये	पैसे
7	60
$\dot{1}\dot{3}$	45
38	50
59	55

संकेत

(1) 0+5 = 5 इकाई में नीचे लिखा।

(2) 6+4 = 10 अतः 4 के पूर्वेण अंक 3 पर एकाधिक चिह्न लगाया।

(3) शेषफल 0+5 = 5 को लिखा योग में दहाई के स्थान पर

(4) 7+3$\dot{}$ = 11 अतः $\dot{3}$ के पूर्वेण अंक 1 पर एकाधिक चिह्न

(5) शेषफल 1+8 =9 नीचे लिखा योग में सैंकड़े के स्थान पर

(6) $\dot{1}$+3 = 5 नीचे लिखा योग के स्थान पर

उदाहरण 4

किमी	मीटर
26	386
$\dot{0}9\dot{7}$	$\dot{8}6\dot{5}$
124	251

संकेत

(1) 6+5 = 11 अतः 5 के पूर्वेण अंक 6 पर एकाधिक चिह्न शेषफल 1 को योग के स्थान मीटर में इकाई पर

(2) 8+$\dot{6}$ = 15 अतः $\dot{6}$ के पूर्वेण अंक 8 पर एकाधिक चिह्न शेषफल 5 को योग के स्थान दहाई के मीटर पर

(3) 3+8$\dot{}$ = 12 अतः $\dot{8}$ के पूर्वेण 7 पर एकाधिक चिह्न शेषफल 2 को योग के स्थान पर सैंकड़े के मीटर पर

(4) 6+$\dot{7}$ = 14 अतः $\dot{7}$ के पूर्वेण अंक 9 पर एकाधिक चिह्न

(5) शेषफल 4 को योग के स्थान पर किमी में

(6) 2+9$\dot{}$ = 12 अतः $\dot{9}$ के पूर्वेण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न

(7) $\dot{0}$ = 1 योग के स्थान पर

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 7.1

1. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से योगफल ज्ञात कीजिए –

(i) 96
+ 68
_____

(ii) 98
49
+ 35
_____

(iii) 327
496
+ 528
_____

(iv)

रुपये	पैसे
418	75
+ 395	36

(v)

किमी	मीटर
86	786
+ 75	345

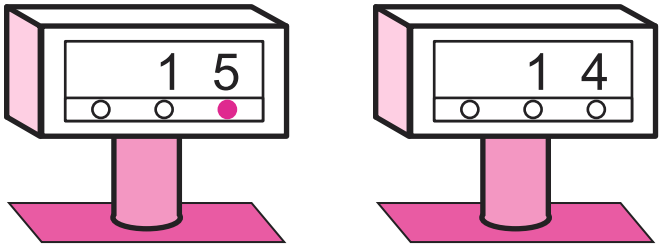
(vi)

किग्रा	ग्राम
139	65
+ 87	83

7.4 एकन्यूनेन (पूर्व से एक कम)

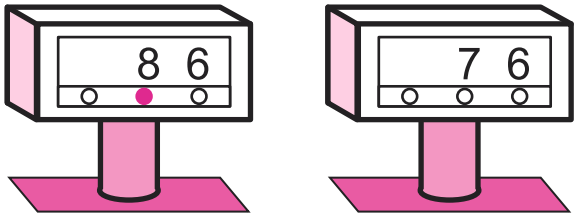
दीदी यदि एक अधिक करके बॉक्स पर लिखी संख्या को ज्ञात कर रहे थे तो क्यों नहीं हम एक ऐसा बॉक्स बनाए जहाँ एक कम वाली संख्या वह बता सके। आओ उस बॉक्स पर एक कम करके देखते हैं।

बॉक्स पर 15 बोले तो वह बॉक्स एक कम करके 14 बताए।



एक न्यूनेन का अर्थ एक **(कम)** से है एक कम दर्शाने हेतु संख्या के नीचे बिन्दु (•) लगाते हैं।

इसी प्रकार पुष्कर ने संख्या 86 बोली तो बॉक्स ने एक कम करके 76 बताई।



अर्थात् नीचे की ओर गहरे बिन्दु की संख्या को एक कम बताती है। दूसरे बॉक्स में गहरा बिंदु 86 के अंक 8 के नीचे है अतः बॉक्स संख्या 76 दर्शाती है। एक न्यूनेन पूर्वेण–एक न्यूनेन पूर्वेण में पूर्व से एक कम से है अर्थात 19 में 19 का एक न्यूनेन पूर्वेण चिह्न 19 अर्थात 09 होगा।

इस प्रकार के कुछ अभ्यास दिए गए हैं जिन्हें आप भी बॉक्स में रखकर देखें और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

www.rajteachers.com

करो और सीखो

संख्या	एक न्यून पूर्वेण चिह्न	नवीन संख्या
15 में अंक 5 का	1̣5	05
23 में अंक 9 का	.....	.....
47 में अंक 4 का	.....	.....
159 में अंक 9 का	15̣9	149
351 में अंक 1 का	.....	.....
524 में अंक 2 का	.....	.....
1675 में अंक 6 का	.....	.....
8963 में अंक 9 का	.....	.....

7.5 परममित्र अंक

सुलोचना दीदी कक्षा में एक डिब्बा लेकर आती हैं। इस डिब्बे में 10 गोलियाँ रखी हुई हैं। दीदी एक बालक को कहती हैं कि इस डिब्बे में से गोली निकालो तो तेज सिंह नौ गोली निकालता है। तब दीदी पूछती हैं डिब्बे में शेष कितनी गोलियाँ रही हैं। उत्तर प्राप्त हुआ 1।

इसी प्रकार अन्य बालक भी डिब्बे में से गोलियाँ निकालते हैं। एक बालक 6 गोलियाँ निकालता है तो डिब्बे में शेष कितनी गोलियाँ रही। उत्तर प्राप्त हुआ 4 गोलियाँ। इस प्रकार निकाली गई एवं शेष बची गोलियों का योग 10 है अतः शेष बची गोलियाँ 10 गोलियों में से निकाली गोलियाँ घटाने पर प्राप्त होती हैं इस प्रकार यदि संख्या 10 आधार की हो एवं एक संख्या दी हो तो शेष संख्या उस संख्या का परम मित्र अंक है। जैसे–

1 का परममित्र अंक (मित्र अंक)	= 9	(10–1 = 9)
2 का परममित्र अंक	= 8	(10–2 = 8)
3 का परममित्र अंक	= 7	
4 का परममित्र अंक	= 6	
5 का परममित्र अंक	= 5	
9̇ का परममित्र अंक	= 0	

(9̇ = 9 एकाधिक)

अर्थात् दोनों संख्याओं का योग 10 है।

www.rajteachers.com

सूत्र एक न्यूनेनपूर्वेण + परममित्र अंक से व्यवकलन करते हैं।

उदाहरण 5 52 – 27 को हल कीजिए।

$$\begin{array}{r} \dot{5}2 \\ -\ 27 \\ \hline 25 \end{array}$$

संकेत

(i) 2 में से 7 नहीं घटता, अतः 7 का परममित्र अंक 3 को 2 में जोड़ा 2+3= 5 योग के नीचे लिखिए।

(ii) 2 के पूर्वेण अंक 5 पर एक न्यून चिह्न लगाएँ जैसे– $\dot{5} = 4$

(iii) $\dot{5}$ में से 2 (4–2 = 2) घटाने पर शेष 2 को नीचे लिखिए।

इस प्रकार 52 – 27 का अभीष्ट हल 25 है।

उदाहरण 6 643 में से 359 घटाइए।

$$\begin{array}{r} \dot{6}\dot{4}3 \\ -\ 359 \\ \hline 284 \end{array}$$

संकेत

(i) 3 में से 9 नहीं घटता, अतः 9 का परममित्र 1 अंक अतः में 1 जोड़ा तो योगफल 3+1 = 4

(ii) 3 के पूर्वेण अंक 4 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\dot{4}$

(iii) $\dot{4}$ = 3 में से 5 नहीं घटता अतः 5 का परममित्र 5 अंक 3 में जोड़ा, योगफल 3+5 = 8 लिखिए।

(iv) $\dot{4}$ के पूर्वेण अंक 6 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\dot{6}$

(v) $\dot{6}$ = 5, 5 में से 3 घटाने पर 5 – 3 = 2

इस प्रकार 643 – 359 का अभीष्ट हल 284 है।

उदाहरण 7 घटाइए।

रुपये	पैसे
$\dot{8}1$	$\dot{8}5$
– 24	96
56	89

संकेत

(i) 5 में से 6 नहीं घटता, अतः 6 का परममित्र 4 अंक 5 में जोड़ा तो योगफल 5 + 4 = 9 लिखिए।

(ii) 5 के पूर्वेण अंक 8 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\dot{8}$

(iii) $\dot{8}$ = 7 में से 9 नहीं घटता अतः 9 का परममित्र 1 अंक जोड़ा, योगफल $\dot{8}$ + 1 = 8 लिखिए।

(iv) $\dot{8}$ के पूर्वेण अंक 1 पर एक न्यून चिह्न लगाना जैसे $\dot{1}$

(v) $\dot{1}$ = 0 में से 4 नहीं घटता अतः 4 का परममित्र अंक 6, अंक $\dot{1}$ में जोड़ा, योग $\dot{1}$ + 6 = 6 लिखिए।

(vi) $\dot{1}$ के पूर्वेण अंक 8 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\dot{8}$

(vii) $\dot{8}$ = 7 में से 2 घटाया तो $\dot{8}$ – 2 = 5 लिखिए।

इस प्रकार 81 रु 25 पैसे में से 24 रु 96 पैसे का घटाने का अभीष्ट हल 96 रु 89 पैसे



www.rajteachers.com

उदाहरण 8 हल कीजिए।

किमी	मीटर
3̣7	6̣70
28	890
08	780

संकेत

(i) 0 में से 0 घटाने पर = 0

(ii) 7 में से 9 नहीं घटता, 9 का परममित्र 1, अंक 7 में जोड़ा अतः 7+1=8 लिखिए।

(iii) 7 के पूर्वेण अंक 6 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे 6̣

(iv) 6̣ = 5 में से 8 नहीं घटता, 8 का परममित्र 2, अंक 6̣ में जोड़ा जैसे 6̣ + 2 = 7 लिखिए।

(v) 6̣ के पूर्वेण अंक 7 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे 7̣

(vi) 7̣ = 6 में से 8 नहीं घटता, 8 का परममित्र अंक 2, 7̣ में 2 जोड़ा अतः 7̣ + 2 = 8 लिखिए।

(vii) 7̣ के पूर्वेण अंक 3 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे 3̣

(viii) 3̣ = 2 अंक में से 2 घटाने पर 2 − 2 = 0 लिखिए।

प्रश्नावली 7.2

1. सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण के परम मित्र अंक की सहायता से व्यवकलन कीजिए।

(i) 75 − 27 = ____

(ii) 84 − 56 = ____

(iii) 435 − 146 = ____

(iv) 840 − 573 = ____

(v)

रुपये	पैसे
75	40
− 56	73

(vi)

मीटर	सेमी
134	40
− 65	85

(vii)

किग्रा	ग्राम
235	125
− 79	238

www.rajteachers.com

7.6 विचलन

चेतन दुकान पर एक माचिस का पूड़ा (पैकेट) लेने गया, दुकानदार ने उसका मूल्य 7 रुपये बताया, चेतन 10 रुपये देता है तो दुकानदार उसे 3 रुपये वापस लौटाता है। शिवा दुकान पर पहुँचता है एक नमक की थैली लेता है जिसकी कीमत 15 रुपये बताता है शिवा दुकानदार को 10 रुपये के साथ 5 रुपये का एक नोट देता है।

उक्त दोनों उदाहरण में हमने 10 के आधार पर लेन–देन हुआ।

कपिल ने दुकान से 200 मिलीलीटर दूध की थैली 8 रुपये में, दुर्गा ने एक श्रीफल/नारियल 12 रुपये में खरीदा। अतः कपिल को दुकानदार ने 2 रुपये लौटाए एवं दुर्गा ने 10 रुपये के साथ 2 रुपये अधिक दिए। यदि कपिल दोनों वस्तुएँ एक साथ खरीदता तो दुकानदार को कितने रुपये देता ? दुकानदार को 20 रुपये देता। वैदिक गणित में गणनाओं को सरल करने के लिए सामान्यतः 10 या 10 के गुणक अथवा 10 की घात को संख्या आधार मानकर गणनाएँ सरलता से की जाती हैं।

अतः आधार से कम या ज्यादा मान को ही विचलन कहा जाता है आधार से कम मान को ऋणात्मक विचलन व अधिक मान को धनात्मक विचलन कहते हैं।

करो और सीखो

संख्या 9	10 से कितना कम ..... –1
संख्या 6	10 से विचलन.....
संख्या 14	10 से कितना अधिक .....
संख्या 85	100 से कितना कम .....
संख्या 89	100 से कितना कम .....
संख्या 94	100 से विचलन .....
संख्या 102	100 से कितना अधिक ..... +02
संख्या 105	100 से कितना अधिक .....
संख्या 113	100 से विचलन .....

7.7 विनकूलम

पूर्व में परममित्र अंकों का अध्ययन किया जिसमें दो अंकों का योग 10 के बराबर होता है तो अंक एक दूसरे के परममित्र अंक हैं। संख्या आधार 10 से कितना कम है। उसे ऋणात्मक रूप में दिखाने हेतु अंक के ऊपर रेखा बंधनी लगाते हैं जिन्हें विनकूलम कहते हैं। यहाँ पर 5 से बड़े अंक को छोटे अंकों में बदलने से गणनाएँ छोटी सरल और आसान हो जाती है। जैसे 8, अंक 10 से 2 कम है अतः

$$8 = 10 - 2$$
$$= 10 + \bar{2} \quad (-2 \text{ को विनकूलम में लिखते हैं } \bar{2})$$
$$= 1\bar{2}$$

www.rajteachers.com

उदाहरण 9 7 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

संकेत

(i) 7 का परममित्र अंक 3 पर विनकूलम रेखा

(ii) 7 के पूर्वेण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न

(iii) $\dot{0} = 1$ लिखिए

$$7$$
$$= \dot{0}\bar{3}$$
$$= 1\bar{3}$$

उदाहरण 10 9 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

संकेत

(i) 9 का परममित्र अंक 1 पर विनकूलम रेखा

(ii) 9 के पूर्वेण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न

(iii) $\dot{0} = 1$ लिखिए

$$9$$
$$= \dot{0}\bar{1}$$
$$= 1\bar{1}$$

उदाहरण 11 64 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

संकेत

(i) अंक 4 को यथावत रखेंगे तथा 6 का परममित्र अंक 4 पर विनकूलम रेखा

(ii) 4 पूर्वेण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न

(iii) $\dot{0} = 1$ लिखिए

$$6\ 4$$
$$= \dot{0}\ \bar{4}\ 4$$
$$= 1\bar{4}\ 4$$

उदाहरण 12 079 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

संकेत

(i) 9 के परममित्र अंक 1 विनकूलम रेखा

(ii) 9 के पूर्वेण अंक 7 पर एकाधिक चिह्न $= \dot{7}$

(iii) $\dot{7} = 8$ अतः 8 का परममित्र अंक 2 पर विनकूलम रेखा तथा

(iv) 8 के पूर्वेण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न

(v) $\dot{0} = 1$ लिखिए

$$079$$
$$= \dot{7}\bar{1}$$
$$= 8\bar{1}$$
$$= \dot{0}\bar{2}\bar{1}$$
$$= 1\bar{2}\bar{1}$$

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 7.3

1. सामान्य संख्या को विनकूलम संख्या में बदलिए।

(i) 8 (ii) 27

(iii) 82 (iv) 78 (v) 96

7.7.1 विनकूलम संख्या को सामान्य संख्या में बदलना

(i) विनकूलम को सामान्य संख्या में बदलने के लिए विनकूलम अंक को धनात्मक मान लीजिए।

(ii) इस अंक (माने गए) का परम मित्र अंक लिखिए।

(iii) विनकूलम अंक के पूर्वेण अंक पर एक न्यून चिह्न लगाइए।

(iv) यदि विनकूलम संख्या में तीन अंक हैं तो दहाई अंक को सामान्य में बदलने के बाद इकाई अंक को बदलेंगे।

उदाहरण 13 $2\bar{4}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

$2\bar{4}$

$\dot{2}6$

16

संकेत

(i) $\bar{4}$ के धनात्मक मान 4 का परम मित्र अंक 6 लिखिए।

(ii) $\bar{4}$ के पूर्वेण अंक 2 पर एक न्यून चिह्न लगाइए जैसे $\dot{2}$

(iii) $\dot{2} = 1$ लिखिए

उदाहरण 14 $5\ \bar{3}\ \bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

$5\ \bar{3}\ \bar{2}$

$= 5\ \dot{7}\ \bar{2}$

$= 4\ 7\ \bar{2}$

$= 4\ \dot{7}\ 8$

$= 4\ 6\ 8$

संकेत

(i) दहाई स्थान के $\bar{3}$ के धनात्मक मान 3 का परम मित्र अंक 7 लिखिए।

(ii) $\bar{3}$ के पूर्वेण अंक 5 पर एक न्यून चिह्न लगाइए जैसे $\dot{5} = 4$

(iii) इकाई के स्थान पर $\bar{2}$ के धनात्मक मान 2 का परम मित्र अंक 8 लिखिए ।

(iv) $\bar{2}$ के पूर्वेण अंक 7 पर एक न्यून चिह्न $\dot{7}$ लगाइए।

(v) $\dot{7} = 6$ लिखिए।

प्रश्नावली 7.4

1. विनकूलम संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

(i) $3\ \bar{5}$ (ii) $5\ \bar{4}$ (iii) $13\bar{2}$ (iv) $5\ \bar{4}\ \bar{2}$ (v) $6\ \bar{2}\ \bar{3}$

www.rajteachers.com

7.7.2 विनकूलम प्रयोग से योग संक्रिया

विनकूलम संख्याओं के योग से भी सामान्य संख्याओं की भांति ही योग किया जाता है। इकाई स्थान वाले अंकों का योग इकाई स्थान पर तथा दहाई स्थान वाले अंकों का योग दहाई स्थान पर लिखा जाता है।

निम्नांकित योग को कर के देखते हैं।

(i) $\bar{2} + 3 = 5$

(ii) $\bar{1}\ 3 + 2\ 4 = 3\ 7$

(iii) $2 + \bar{2} = 0$

(iv) $8 + \bar{3} = 5 + 3 + \bar{3} = 5$ ($8 = 5 + 3$ लिखा एवं $3 + \bar{3} = 0$ होता है।)

(v) $\bar{6} + 2 = \bar{4} + \bar{2} + 2 = \bar{4}$

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि विनकूलम अंकों का योग विनकूलम अंक होता है

संख्या और उसकी विनकूलम संख्या का योग शून्य प्राप्त हुआ। सामान्य संख्या या विनकूलम में से जो संख्या बड़ी है, योग उसी संख्या का प्राप्त हुआ।

उदाहरण 15 विनकूलम से योग कीजिए

$$\begin{array}{r} \bar{1}2 \\ 1\bar{2} \\ \hline 00 \end{array}$$

संकेत

(i) इकाई के अंक में $2 + \bar{2} = 0$

(ii) दहाई के अंक में $\bar{1} + 1 = 0$

उदाहरण 16 विनकूलम से योग कीजिए

$$\begin{array}{r} 6\bar{4} \\ \bar{3}\bar{2} \\ \hline 3\bar{6} \\ \hline = 3\dot{4} \\ = 24 \end{array}$$

संकेत

(i) इकाई के अंक में $\bar{4} + \bar{2} = \bar{6}$

(ii) दहाई के अंक में $6 + \bar{3} = 3$

(iii) $3\bar{6}$ को सामान्य संख्या में बदलना

(iv) $\bar{6}$ का परममित्र 4 एवं अंक 3 पर एक न्यून चिह्न है जैस $3\dot{}$

(v) $3\dot{} = 2$ लिखिए

प्रश्नावली 7.5

1. विनकूलम संख्या का योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 6\ \bar{3} \\ 4\ \bar{3} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 7\ 3 \\ 4\ \bar{2} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 8\ \bar{2} \\ \bar{5}\ \bar{5} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} 8\ \bar{9} \\ \bar{7}\ 8 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (v) $\begin{array}{r} 5\ \bar{3} \\ \bar{2}\ 1 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

www.rajteachers.com

7.7.3 विनकूलम प्रयोग से व्यवकलन संक्रिया

विनकूलम संख्याओं के प्रयोग से सामान्य संख्याओं की भांति ही व्यवकलन किया जाता है इकाई स्थान वाले अंकों का व्यवकलन इकाई स्थान पर तथा दहाई स्थान वाले अंकों का व्यवकलन दहाई स्थान पर लिखा जाता है। साथ ही जो संख्या घटती है उसके प्रत्येक अंक पर विनकूलम चिह्न लगा कर उसे ऊपर की संख्या में जोड़ देते हैं।

निम्नांकित व्यवकलनों को कर के देखते हैं।

(i) $\bar{2} - 3 = \bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$

(ii) $\bar{1}\ \bar{3} - 2\ 4 = \bar{1}\ \bar{3} + \bar{2}\ \bar{4} = \bar{3}\ \bar{7}$

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि विनकूलम अंकों का व्यवकलन विनकूलम अंक होता है।

उदाहरण 17 83 में से 45 घटाइए।

$$\begin{array}{r} 83 \\ -\ 45 \\ \hline \\ 83 \\ +\ \bar{4}\bar{5} \\ \hline 4\bar{2} \end{array}$$

$= 4\dot{8}$

$= 38$

संकेत

(i) -45 का $+$ चिह्न में बदलने पर 4 व 5 के ऊपर विनकूलम रेखा खींचिए।

(ii) इकाई में $3 + \bar{5} = \bar{2}$ लिखिए

(iii) दहाई स्थान पर $8 + \bar{4} = 4$ लिखिए

(iv) योगफल $4\bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

उदाहरण 18 793 − 426 घटाइए।

$$\begin{array}{r} 793 \\ -\ 426 \\ \hline \\ 793 \\ +\bar{4}\bar{2}\bar{6} \\ \hline 37\bar{3} \end{array}$$

$= 3\dot{7}7$

$= 367$

संकेत

(i) -426 को $+$ चिह्न में बदलने पर अंक 4, 2 व 6 पर विनकूलम रेखा खींचिए।

(ii) इकाई में $3 + \bar{6} = \bar{3}$ लिखिए

(iii) दहाई के स्थान पर $9 + \bar{2} = 7$ लिखिए।

(iv) सैंकड़े के स्थान पर $7 + \bar{4} = 3$ लिखिए।

(v) $37\bar{3}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 7.6

1. विनकूलम प्रयोग से व्यवकलन ज्ञात कीजिए।

(i) 96 − 49

(ii) 932 − 245

(iii) 952 − 788

(iv) 834 − 547

7.8 पहाड़े लिखने की वैदिक गणित पद्धति (विनकूलम से)

विधि : – (i) जिस संख्या का पहाड़ा लिखना है उसे विनकूलम में बदलिए।
(ii) विनकूलम संख्या के दहाई व इकाई अंकों को पहचानिए।
(iii) निर्देशानुसार विनकूलम अंकों में क्रमशः जोड़ते जाइए।

उदाहरण 19 9 का पहाड़ा लिखिए।

09 को विनकूलम $9 = 10 - 1 = 1\bar{1}$

यहाँ $1\bar{1}$ में इकाई का अंक $\bar{1}$ यानि एक कम होता है एवं दहाई का अंक एक अधिक होता है।

09
$1\bar{1}$
09
18 ← (9 − 1)
27 ← (8 − 1)
36 ← (7 − 1)
45 ← (6 − 1)
54
63
72
81
90

(0 + 1) → 18
(1 + 1) → 27
(2 + 1) → 36
(3 + 1) → 45

ऐसा करते जाएँगे

www.rajteachers.com

उदाहरण 20 8 का पहाड़ा बनाइए।

08 का विनकूलम 1 $\bar{2}$ होता है अतः यहाँ इकाई का अंक 2 कम होता जाएगा एवं दहाई का अंक 1 अधिक होता जाएगा।

08
1$\bar{2}$
08

(0 + 1) → 16 ← (8 − 2)
(1 + 1) → 24 ← (6 − 2)
(2 + 1) → 32 ← (4 − 2)
(3 + 1) → 40 ← (2 − 2)
(4 + 1) → 5$\bar{2}$ = 48 (0 − 2 = $\bar{2}$) ← (4 + 1)
(4 + 1) → 56 ← (8 − 2 = 6)

64
72 इसी तरह आगे भी
80

5 $\bar{2}$ का सामान्य रूप 4 8 होता है।

अब हम इस तरह कई संख्याओं के पहाड़े बना सकते हैं।

करो और सीखो

निम्नलिखित संख्याओं के पहाड़े बनाइए।

(i) 99 (ii) 98 (iii) 89 (vi) 999

7.9 गुणन संक्रिया (सूत्र निखिलम् द्वारा)

जब आधार 10 व 100 हो–

पूर्व में हमने विचलन को समझा था जो कि आधार 10 या 10 की घात के रूप में लिया गया यदि संख्या में से आधार को घटाने पर विचलन ज्ञात किया, वह विचलन धनात्मक व ऋणात्मक प्राप्त होता है।

आओ अब सूत्र निखिलम् से गुणन संक्रिया की विधि को समझते हैं–

1. जिन दो संख्याओं का गुणन करना है उन संख्याओं का निकटतम आधार 10 या 100 लेवें।
2. आधार के सापेक्ष विचलनों को संख्याओं के सामने लिखिए।
3. तिरछी रेखा से गुणनफल स्थान के दो भाग कीजिए।
4. दाहिने पक्ष में विचलनों का गुणनफल कीजिए।
5. बाएँ पक्ष में कोई एक संख्या + ली गई संख्या के अतिरिक्त दूसरी संख्या का विचलन लीजिए।
6. दाहिने पक्ष में विचलनों के गुणनफल में–
   (i) यदि आधार 10 है तो दाहिने पक्ष में एक अंक रहेगा। यदि दो अंक हैं तो दहाई का अंक बाएँ पक्ष में जोड़िए।

www.rajteachers.com

(ii) आधार 100 है तो गुणनफल में दो अंक रहेंगे। यदि एक अंक हो तो उससे पूर्व में 0 और लिखो।

7. यदि विचलनों का गुणनफल ऋणात्मक हो तो बाए पक्ष से एक अंक (जो कि आधार होगा) ले कर इसे धनात्मक रूप में बदलिए।

आओ निखिलम् सूत्र से गुणन संक्रिया करें–

उदाहरण 21

13 x 12

संख्या	विचलन
13	+ 3
x 12	+ 2
= (13 +2) या (12 + 3)	(+3 x +2)

= 15 / 6

= 156

संकेत

1. गुणन संख्या 13 = 10 + 3 व जो कि 10 से 3 अधिक व 12 = 10 + 2 जो कि 10 से 2 अधिक है जिसे विचलन के रूप में +2 व +3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +3 x +2 = + 6 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 13 +2 या 12 + 3 = 15
5. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 156

उदाहरण 22

15 x 17

संख्या	विचलन
15	+ 5
x 17	+ 7
= (15 + 7) या (17 + 5)	(+ 5 x + 7)

= 22 / 35

= 22 / 5
(3)

= 25 / 5

= 255

संकेत

1. गुणन संख्या 15 = 10 + 5 व जो कि 10 से 5 अधिक व 17 = 10 + 7 जो कि 10 से 7 अधिक है जिसे विचलन के रूप में + 5 व + 7 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +5 x +7 = +35 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 15 + 7 या 17 + 5 = 22
5. दाहिने पक्ष में एक अंक रहेगा क्योंकि आधार 10 में एक शून्य है।
6. विचलन का गुणनफल 35 में इकाई का अंक 5 दाहिने पक्ष में 3 बाएँ पक्ष में (आधार 10 के रूप में) जोड़िए।
7. बाएँ पक्ष में 22 + 3 = 25 होगा।
8. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 255

www.rajteachers.com

उदाहरण 23

8 X 7

संख्या	विचलन
8	– 2
x 7	– 3

= (8 – 3) या (7 – 2) / (–2 X – 3)

= 5 / 6

= 56

संकेत

1. गुणन संख्या 8 = 10 – 2 व जो कि 10 से 2 कम व 7 = 10 – 3 जो कि 10 से 3 कम है जिसे विचलन के रूप में – 2 व – 3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल –2 X – 3 = + 6 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 8 – 3 या 7 –2 = 5
5. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 56

उदाहरण 24

6 X 9

संख्या	विचलन
6	– 4
x 9	– 1

= (6 – 1) या (9 – 4) / (–4 X – 1)

= 5 / 4

= 54

संकेत

1. गुणन संख्या 6 = 10 – 4 व जो कि 10 से 4 कम व 9 = 10 – 1 जो कि 10 से 1 कम है जिसे विचलन के रूप में – 4 व – 1 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए ।
3. विचलनों का गुणनफल – 4 X – 1 = + 4 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 6 – 1 या 9 –4 = 5
5. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 54



www.rajteachers.com

उदाहरण 25

6 X 7

संख्या	विचलन
6	– 4
x 7	– 3
= (6 – 3) या (7 – 4)	(–4 X – 3)

= 3 / 12

= 3 / 1 2

= 4 / 2

= 42

संकेत

1. गुणन संख्या 6 = 10 – 4 व जो कि 10 से 4 कम व 7 = 10 – 3 जो कि 10 से 3 कम है जिसे विचलन के रूप में – 4 व – 3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल– 4 X – 3 = + 12 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में 6 – 1 या 9 –4 = 5 लिखिए
5. दाहिने पक्ष में एक अंक रहेगा क्योंकि आधार 10 में एक शून्य है।
6. विचलन का गुणनफल 12 में इकाई का अंक 2 दाहिने पक्ष में 1 बाए पक्ष में (आधार 10 के रूप में) जोड़िए।
7. बाएँ पक्ष में 3 जो कि 30 दहाई में एक दहाई जोड़ने पर।
8. बाएँ पक्ष में 3 + 1 = 4 होगा।
9. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 42

उदाहरण 26

8 X 13

संख्या	विचलन
8	– 2
x 13	+ 3
= (8 + 3) या (13 – 2)	(–2 X +3)

= 11 / – 6

= 10 / 1 –6

= 10 / 10 – 6

= 10 / 4

= 104

संकेत

1. गुणन संख्या 8 = 10 – 2 व जो कि 10 से 2 कम व 13 = 13 – 10 जो कि 10 से 3 अधिक है जिसे विचलन के रूप में – 2 व + 3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल – 2 X + 3 = – 6 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में 8 + 3 या 13 –2 = 11 लिखिए।
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल ऋणात्मक है इसे धनात्मक में बदलने के लिए बाएँ पक्ष से 1 को 1X10 = 10 के रूप में दाहिने पक्ष में ले जाइए।
6. बाएँ पक्ष में 11 – 1 = 10 शेष बचेंगे।
7. दाहिने पक्ष में 10 – 6 = 4
8. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 104

www.rajteachers.com

उदाहरण 27

7 X 16

संख्या	विचलन
7	– 3
x 16	+ 6
= (7 + 6) या (16 – 3)	(–3 X +6)

= 13 / – 18

= 11 / –18
(2 से 10 बनाया)

= 11 / 20 – 18

= 11 / 2

= 112

संकेत

1. गुणन संख्या 7 = 10 – 3 व जो कि 10 से 3 कम व 16 = 16 – 10 जो कि 10 से 6 अधिक है जिसे विचलन के रूप में – 3 व + 6 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल (– 3) X + (6) = – 18 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखें।
4. बाएँ पक्ष में 7 + 6 या 16 –3 = 13 लिखिए
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल ऋणात्मक है इसे धनात्मक में बदलने के लिए बाएँ पक्ष से 2 को 2X 10 = 20 के रूप में दाहिने पक्ष में ले जाइए।
6. बाएँ पक्ष में 13 – 2 = 11 शेष बचेंगे।
7. दाहिने पक्ष में 20 – 18 = 2 (आधार 10 में एक शून्य है अतः एक अंक)
8. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 112

उदाहरण 28

जब आधार 100 हो तब निखिलम् से गुणन संक्रिया

103 X 104

संख्या	विचलन
103	+03
x 104	+04
= (103 + 04) या (104 +03)	(+03 X +04)

= 107 / 12

= 10712

संकेत

1. गुणन संख्या 103 = 103 – 100 व जो कि 100 से 3 अधिक व 104 = 104 – 100 जो कि 100 से 4 अधिक है जिसे विचलन के रूप में +03 व + 04 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +03 X + 04 = +12 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखें।
4. बाएँ पक्ष में 103 + 04 या 104 +03 = 107 लिखिए।
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल +12 है आधार 100 में दो शून्य हैं अतः दाहिने पक्ष में दो अंक रहेंगे।
6. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 10712

www.rajteachers.com

उदाहरण 29

101 X 108

संख्या	विचलन
101	+01
x 108	+08

= (101 + 08) या (108 +01) / (+01 X +08)

= 109 / 08

= 10908

संकेत

1. गुणन संख्या 101 = 101 – 100 व जो कि 100 से 1 अधिक व 108 = 108 – 100 जो कि 100 से 8 अधिक है जिसे विचलन के रूप में +01 व + 08 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +01 X + 08 = +8 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखिए।
4. बाएँ पक्ष में 101 + 08 या 108 +01 = 109 लिखिए
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल +8 है (आधार 100 में दो शून्य हैं अतः दाहिने पक्ष में दो अंक रहेंगे।) अतः +8 की जगह 08 लिखिए।
6. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 10908

उदाहरण 30

92 X 87

संख्या	विचलन
92	–08
x 87	–13

= (92 – 13) या (87 – 08) / (– 08 X –13)

= 79 / 104

= 79 / 04

= 80 / 04

= 8004

संकेत

1. गुणन संख्या 92 = 100 – 92 व जो कि 100 से 8 कम व 87 = 100 – 87 जो कि 100 से 13 कम है जिसे विचलन के रूप में –08 व –13 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल –08 X –13 = +104 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखिए।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 92 – 13 या 87 – 08 = 79
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल 104 है (आधार 100 में दो शून्य हैं अतः दाहिने पक्ष में दो अंक रहेंगे।) अतः 04 रहेगा। 1 को बाएँ पक्ष में जोड़ेंगे।
6. अब बाएँ पक्ष में 79 + 1 = 80
7. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 8004

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 7.7

1. गुणा कीजिए (सूत्र निखिलम् से)।

(i) 12 x 13

(ii) 11 x 19

(iii) 13 x 15

(iv) 8 x 7

(v) 6 x 9

(vi) 8 x 12

(vii) 102 x 104

(viii) 106 x 107

(ix) 112 x 109

(x) 91 x 98

(xi) 96 x 94

(xii) 98 x 104

(xiii) 85 x 93

7.10 निखिलम् विधि से भाग संक्रिया

पूर्व में हमने निखिलम् से गुणा किया जो सामान्य विधि से सरल है। इसी प्रकार निखिलम् विधि से भाग संक्रिया भी बड़ी सरल है।

बार–बार घटाने की विधि जब तक दोहराया जाता है कि जब तक घटना बंद ना हो जाए अथवा शून्य ना आ जाए। यह प्रक्रिया कितनी बार की गई? प्रक्रिया लम्बी हो जाती है। सामान्यतः आज केवल पहाड़े याद करवा करके एक निश्चित विधि से भाग के प्रश्न हल किए जाते हैं। परंतु वैदिक गणित में गुणन संक्रिया की तरह भाग संक्रिया में भी 10 व 100 को आधार मान कर बड़ी सरलता से दिया जा सकता है।

विधि

1. भाजकता का निकटतम आधार निश्चित कर उसकी पूरक संख्या (परममित्र) ज्ञात करेंगे।
2. भाग संक्रिया में निर्धारित स्थान पर दो खड़ी रेखा द्वारा तीन खंडों में बाँटिए।
3. बाईं ओर के प्रथम खंड में भाजक व उसके नीचे उसकी पूरक संख्या लिखिए।
4. आधार में जितने शून्य हैं , भाज्य के उतने ही अन्तिम अंक तीसरे खंड में लिखिए।
5. भाज्य के शेष अंक मध्य खंड में लिखेंगे।

www.rajteachers.com

उदाहरण 31

124 ÷ 9

यहाँ भाजक = 9 का निकटतम आधार = 10

पूरक संख्या = 1

आधार 10 में एक शून्य अतः तीसरे खंड में भाजक के अंक 4 को लिखेंगे।

मध्य खंड में भाज्य का अंक 1 2

	प्रथम खंड		मध्य खंड		तृतीय खंड
संख्या		9	1	2	4
पूरक अंक		1	↓	1 ↓	–
					3
योग →			1	3	7

संकेत

1. मध्य खंड का 1 नीचे योग के स्थान पर लिखते हैं।
2. यह अंक 1 **X** पूरक संख्या 1 = 1 लिखें 2 के नीचे व तृतीय खण्ड में – लिखते हैं।
3. योग 2 + 1 = 3 नीचे लिखे योग के स्थान पर
4. पुनः गुणनफल 3 **X** पूरक संख्या 1 = 3
5. गुणनफल 3 लिखें तृतीय खण्ड में 4 के नीचे, योग 4 + 3 = 7 लिखें ।
6. अतः भाजक = 9 भागफल = 13 शेषफल = 7

इसी प्रकार **आधार 100** की संख्या लेकर आओ अभ्यास करें।

उदाहरण 32 123 ÷ 98

भाजक = 98 पूरक अंक = 100 – 98

= 02

पुनः तीन खण्डों में बाँटिए

प्रथम खंड		मध्य खंड	तृतीय खंड	
संख्या	9 8	1	2	3
पूरक अंक	0 2			

www.rajteachers.com

आधार संख्या में दो शून्य हैं अतः शेष भी अधिकतम दो अंकों का होगा। इसलिए दाईं ओर से 2 अंक छोड़ कर एक सीधी रेखा खींच ली।

बाईं ओर भी एक सीधी रेखा खींची। इस रेखा की बाईं ओर भाजक 98 लिखकर उसके नीचे पूरक संख्या (अंक) 02 लिखी अब आगे क्रिया इस प्रकार है।

प्रथम खंड		मध्य खंड	तृतीय खंड	
संख्या	9 8	1	2	3
पूरक अंक	0 2	↓	0	2
		1	2	5

सबसे पहले भाज्य को मध्य खण्ड का अंक 1 नीचे लिखते हैं इसके पश्चात इस अंक को पूरक संख्या से गुणा करके भाजक के अगले अंकों के नीचे लिखते हैं। अब दाहिनी ओर के अंकों को जोड़ देते हैं।

रेखा के मध्य खण्ड भागफल है और तृतीय खण्ड शेषफल है। यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि तृतीय खण्ड में भाज्य से छोटी संख्या न आ जाए।

विशेषः इस विधि की विशेषता है कि इसमें घटाना नहीं पड़ता है। जोड़ कर ही उत्तर निकालते हैं।

उदाहरण 33 1004 ÷ 87

प्रथम खंड		मध्य खंड		तृतीय खंड	
संख्या	8 7	1	0	0	4
पूरक अंक	1 3	↓	1	3	—
		↓	↓	1	3
		1	1	4	7

संकेत

1. आधार 100 हैं अतः दाईं ओर दो अंक लिखे गए हैं।
2. आधार पर 87 की पूरक संख्या 13 है।
3. नीचे 1 लिखा और 1 का गुणा पूरक संख्या करके लिखा ।
4. योग क्रिया पुनः नीचे 1 प्राप्त हुआ अतः 1 का पुनः पूरक संख्या से गुण्य करके लिखा।
5. योग क्रिया तो भागफल 11 और शेषफल 47 प्राप्त हुआ।

www.rajteachers.com

उदाहरण 34 199 ÷ 97

प्रथम खंड		मध्य खंड	तृतीय खंड	
संख्या	9 7	1	9	9
पूरक अंक	0 3	↓	0	3
		1	10	2
		↑	0	2
		1		
		1	0	3
		2	0	5

संकेत

1. आधार 100 हैं अतः दाईं ओर दो अंक लिखे गए हैं।
2. आधार पर 97 की पूरक संख्या 02 है।
3. नीचे 1 लिखा और 1 का गुणा पूरक संख्या करके लिखा ।
4. शेषफल 102 आया परन्तु तृतीय खण्ड में दो अंक रहेंगे (क्योंकि आधार = 100) अतः 102 में 02 तृतीय खण्ड में 1 को मध्यखण्ड में जोड़ेंगे तथा 1 को पूरक संख्या से गुणा करके तृतीय खण्ड में लिखेंगे और मध्यखण्ड, तृतीय खण्ड का योग करके लिखेंगे।
5. अतः भागफल 2 व शेषफल 5 प्राप्त हुआ।

उदाहरण 35 2345 ÷ 78

प्रथम खंड		मध्य खंड		तृतीय खंड	
संख्या	7 8	2	3	4	5
पूरक अंक	2 2	↓	4	4	–
		↓	↓	5	4
				1	
		2	7	3	9
			↑	2	
			2	4	4
		2	9	8	3
			+1	–7	8
		3	0	0	5

www.rajteachers.com

संकेत

1. आधार 100 पर 78 की पूरक संख्या 22 है।
2. नीचे 2 लिखा उसका गुणा पूरक संख्या से किया और जोड़ने पर
3. नीचे 7 प्राप्त हुआ 7 का गुण्य पूरक संख्या से किया एवं जोड़ने पर, शेषफल में 239 प्राप्त हुआ।
4. 2 को भाग संख्या के नीचे लिखा जोड़ने पर भागफल 29 शेषफल 83 प्राप्त हुआ।
5. शेषफल 83 जो कि भाजक 78 से अधिक है अतः भागफल $= 29 + 1 = 30$
   शेषफल $= 83 - 78 = 5$ प्राप्त हुआ

प्रश्नावली 7.8

1. सूत्र निखिलम् से भाग कीजिए।
   (i) $124 \div 89$
   (ii) $406 \div 9$
   (iii) $298 \div 96$
   (iv) $1358 \div 113$
   (v) $1234 \div 112$
   (vi) $306 \div 8$

हमने सीखा

1. एकाधिकेन से तात्पर्य एक अधिक।
2. एक न्यूनेन से तात्पर्य एक कम।
3. एकाधिकेन पूर्वेण से तात्पर्य पूर्व से एक अधिक।
4. एक न्यूनेन पूर्वेण से तात्पर्य पूर्व से एक कम।
5. परममित्र अंक– जिन दो अंकों का योग 10 होता है वे अंक एक दूसरे के परम मित्र हैं।
6. विचलन = संख्या – आधार
7. विनकूलम – ऋणात्मक संख्याओं को धनात्मक रूप में लिखना।
8. संख्या और उसकी विनकूलम संख्या का योग शून्य प्राप्त होता।
9. दो विनकूलम अंकों का योग विनकूलम होता है।
10. विनकूलम प्रयोग से व्यवकलन करना सरलतम है।
11. विनकूलम प्रयोग से सहायता से पहाड़े लिखना।
12. सूत्र निखिलम द्वारा गुणन तथा भाग संक्रिया करना।

www.rajteachers.com

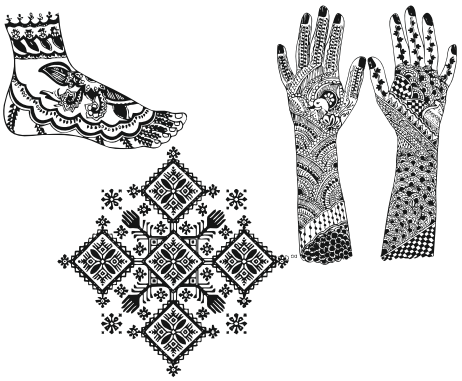
अध्याय
8

आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएँ एवं रचनाएँ

8.1 हम अपने चारों ओर कई प्रकार की वस्तुएँ देखते हैं जैसे इमारतें, बर्तन, फर्नीचर, चित्र आदि। आपने रंगोली एवं मेहंदी के डिजाइन देखे होंगे, इनमें गोल, चोकोर, त्रिकोण, रेखाएँ आदि आकृतियाँ देखी होंगी। यह आकृतियाँ ज्यामितीय आकृतियाँ कहलाती हैं।

अब आप अपने पास वस्तुओं में इस प्रकार की ज्यामितिय आकृतियों को ढूँढने का प्रयत्न कीजिए।

वैदिक काल से ही भारत में विभिन्न वस्तुओं के निर्माण में ज्यामिति का प्रयोग होता आया है चाहे हवन कुंड हो, मंडप हो अथवा मंदिर। घरों, महलों व अन्य इमारतों में भी ज्यामिति आकृतियों का प्रयोग किया जाता है। मूलतः ज्यामिति शब्द "ज्या" तथा "मिति" से मिल कर बना है। ज्या का अर्थ भूमि और मिति का अर्थ मापन से है।



8.2 आधारभूत ज्यामितीय आकृतियाँ

इस अध्याय में हम ज्यामितीय आकृतियों के बारे में अध्ययन करेंगे। नीचे कुछ वस्तुओं के चित्र दिए गए हैं तथा उनके सामने ज्यामितीय आकृतियाँ दी गई हैं। बताइए किस वस्तु की सतह में वह आकृति दिखाई देती है।

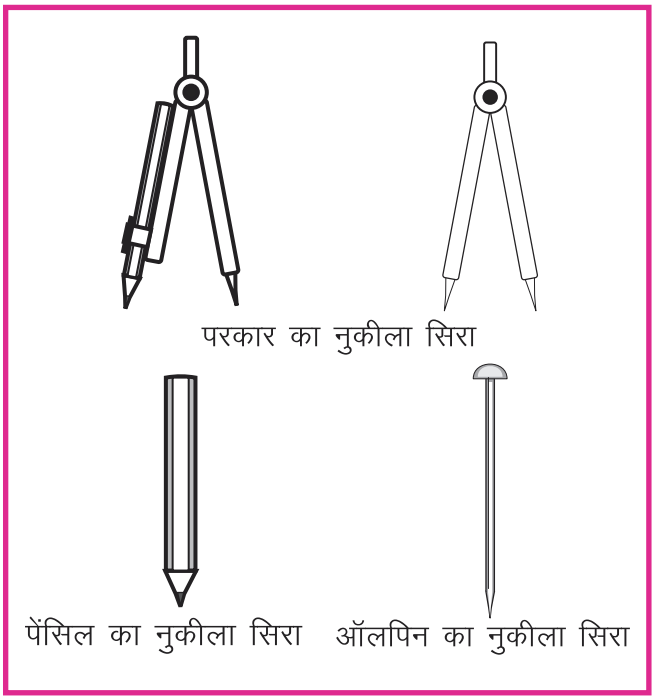
1				
2				
3				
4				
5				

www.rajteachers.com

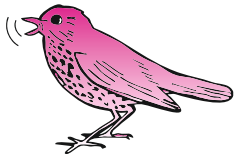
8.2.1 बिन्दु

कागज पर एक पेंसिल के नुकीले सिरे से एक चिह्न अंकित कीजिए।

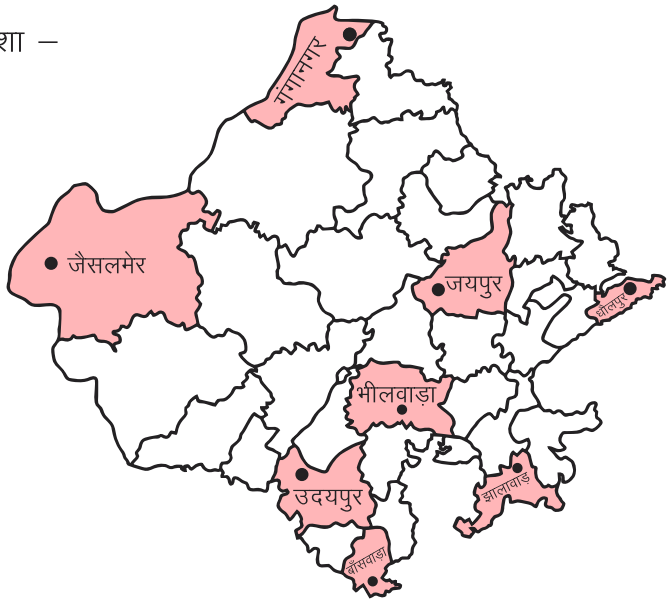




सिरा जितना नुकीला होगा चिह्न उतना ही सूक्ष्म (छोटा) होगा। लगभग एक बिना दिखाई देने वाला सूक्ष्म चिह्न आपको एक बिन्दु का आभास कराएगा। बिन्दु एक स्थिति निर्धारित करता है।



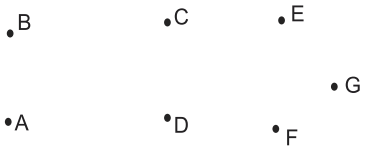
राजस्थान का नक्शा –



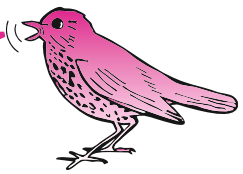
नक्शे में बिन्दू (•) राजस्थान के कुछ शहरों की स्थिति को दर्शा रहे हैं। (नक्शा पैमाने पर आधारित नहीं है।)

www.rajteachers.com

यदि आप किसी कागज पर कुछ बिन्दु अंकित करें तो आपको इनमें भेद बताने की आवश्यकता पड़ेगी। इसके लिए इन्हें अंग्रेजी के बड़े अक्षर A,B,C इत्यादि से व्यक्त किया जाता है।



यदि तीन या अधिक बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो संरेख बिन्दु कहलाते हैं।





करो और सीखो

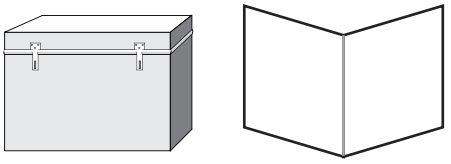
आप अपने दैनिक जीवन में बिन्दु के आभास की कुछ स्थितियाँ चुन कर लिखिए।

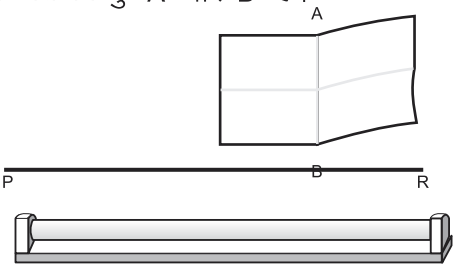
8.2.2 रेखाखंड

एक कागज लीजिए तथा इसे चित्रानुसार मोड़िए और फिर खोल दीजिए।

क्या मोड़ का कोई निशान दिखाई देता है? कागज के टुकड़े पर जो निशान दिखाई देता है वह आपको रेखाखंड का अहसास कराता है। इसके दो अंत बिन्दु A और B हैं।

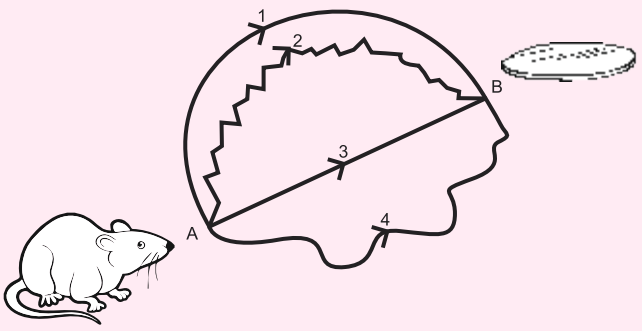
रेखा खंड के कुछ उदाहरण निम्न हैं।





करो और सीखो

1. आप अपने आस–पास से रेखाखण्ड़ों के कुछ उदाहरण ढुँढिए तथा उनके नाम लिखिए।
   जैसे दीवार के कोने .....
2. चित्र को ध्यान से देखिए बिन्दु A पर एक चूहा है तथा बिन्दु B पर रोटी का एक टुकड़ा आपको यह बताना है कि चूहा किस रास्ते से सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा और क्यों ?



www.rajteachers.com

8.2.3 रेखा

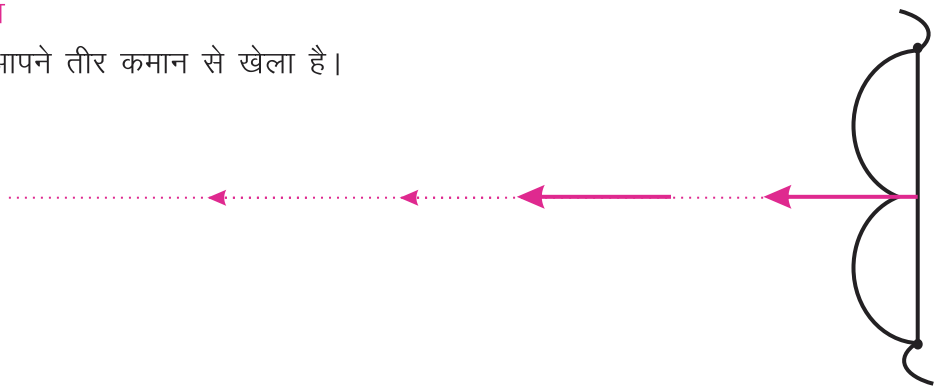
कल्पना कीजिए जब रेखाखण्ड AB को B से आगे और A से आगे की ओर उसी दिशा में लगातार बढ़ाते जाएँ तो क्या होगा ?



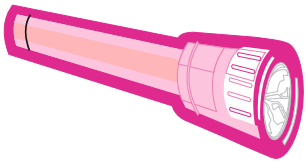
ऐसा करने पर हमें एक रेखा का प्रतिरूप प्राप्त होता है क्योंकि हम अनन्त लम्बाई की रेखा को कागज पर नहीं बना सकते है, अतः इसे प्रदर्शित करने के लिए उसके दोनों सिरों पर तीर के निशान बना देते है। जैसे कि ऊपर चित्र में दिखाया गया है। इसे $\overleftrightarrow{AB}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

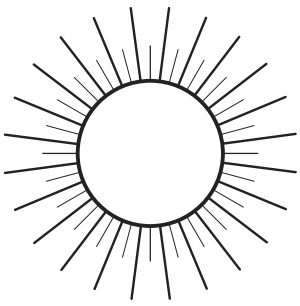
8.2.4 किरण

क्या आपने तीर कमान से खेला है।



आप जिन तीरों से खेलते हैं वह कुछ दूरी तक जा कर गिर जाता है। यदि एक ऐसे तीर की कल्पना की जाए जो छोड़ी गई दिशा में अनन्त दूरी तक जाए तो उससे बनने वाला पथ किरण का निर्माण करता है अर्थात् किरण एक बिन्दु से प्रारम्भ होती है तथा उसी दिशा में अनन्त दूरी तक जाती है। दैनिक जीवन में कुछ अन्य किरणों के उदाहरण हैं –





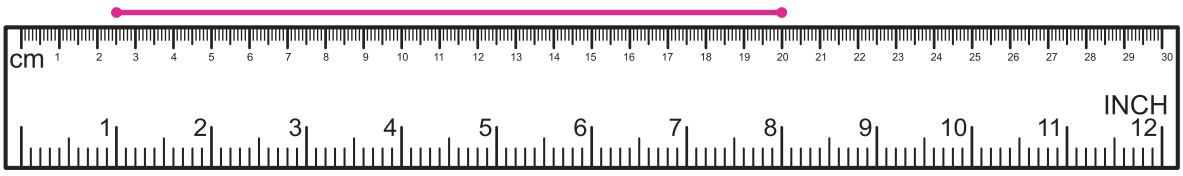
जिस बिन्दु से किरण प्रारम्भ होती हैं वह प्रारम्भिक बिन्दु कहलाता है।



दिए गए किरण के चित्र में A किरण का प्रारम्भिक बिन्दु है तथा P किरण का एक अन्य बिन्दु है। इसे $\overrightarrow{AP}$ से व्यक्त करते हैं।

www.rajteachers.com

8.3 स्केल (पटरी का परिचय)



कक्षा 5 में आपने मीटर स्केल से वस्तुओं व छात्रों की लम्बाई नापना सीखा है। ऊपर स्केल (पटरी) का चित्र दिया गया है। आप दी गई पटरी के चित्र को देख कर अथवा उपलब्ध स्केल को देख कर निम्न प्रश्नों का उत्तर दें –

1. इसमें नीचे की ओर कितनी संख्या तक अंकित हैं ?

   .....

2. ऊपर की ओर कितनी संख्या तक अंकित हैं ?

   .....

3. दो लगातार संख्याओं के मध्य कितने छोटे चिह्न बने हैं ?

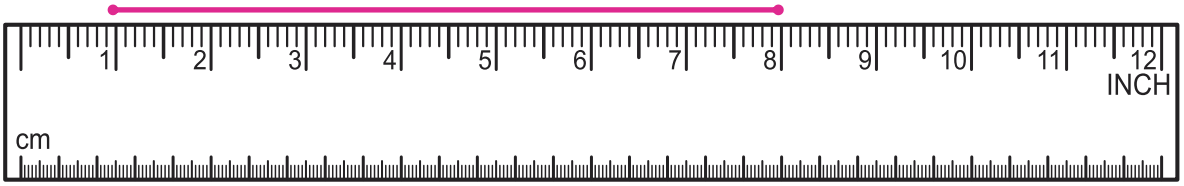
   .....

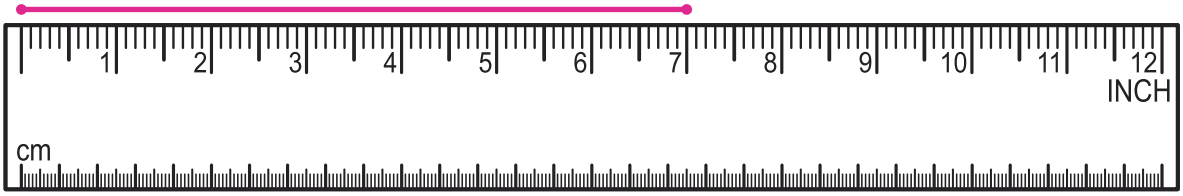
ऊपर की ओर 30 तक बने चिह्न सेंटीमीटर को प्रदर्शित करते हैं तथा उनके बीच बने प्रत्येक 10 छोटे बराबर भाग 1 मिमी (मिलीमीटर) को प्रदर्शित करते हैं। अतः 1 सेमी = 10 मिमी होता है।

1 मिमी = ... सेमी।

नीचे की ओर अंकित 12 संख्याएँ प्रत्येक 1 इंच को प्रदर्शित करती हैं, सामान्यतः ज्यामिति में स्केल का उपयोग हम रेखा, रेखाखंड, किरण आदि को बनाने में करते हैं।

अजय व विजय ने रेखाखंड को मापने के लिए 12 इंच वाले स्केल का उपयोग किया



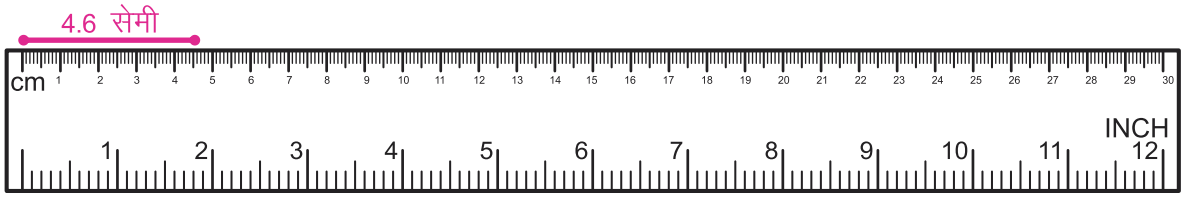


अजय तथा विजय ने एक ही रेखा खंड को चित्रानुसार मापा। क्या आप बता सकते हैं कि किसका उत्तर सही है? क्या किसी भी रेखाखंड को मापते समय पटरी पर अंकित शून्य को रेखाखंड के प्रारंभिक बिन्दु पर रख कर मापना चाहिए?

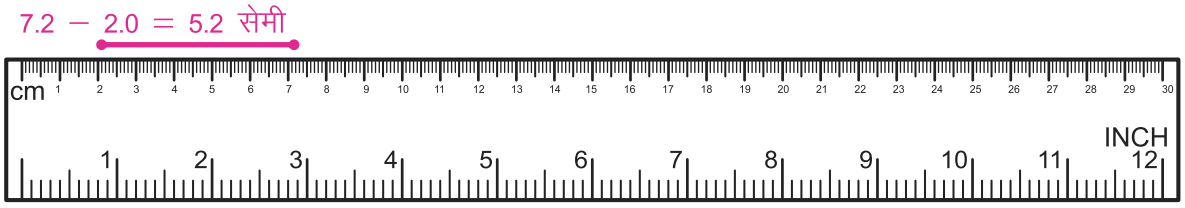


www.rajteachers.com

चित्र में कुछ माप के रेखाखंड दिए हैं।



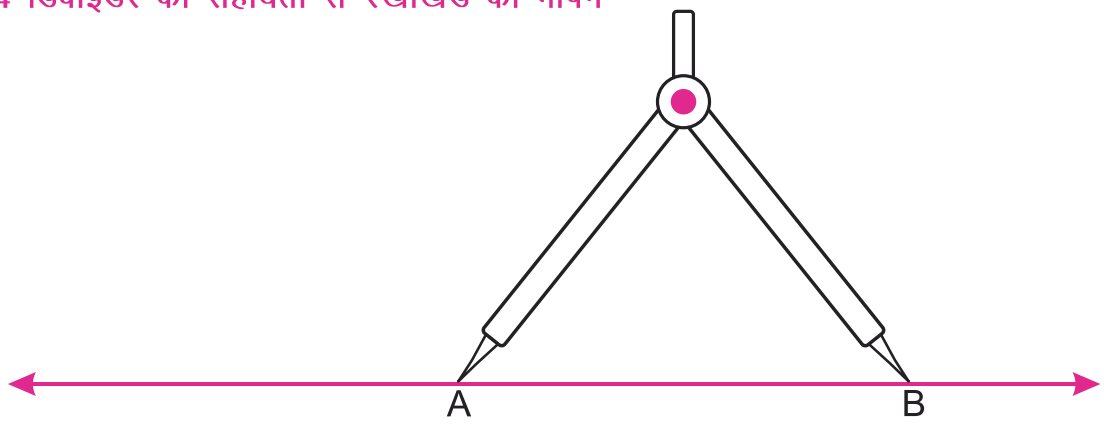
4.6 सेमी अर्थात् 4 सेमी व 6 मिमी



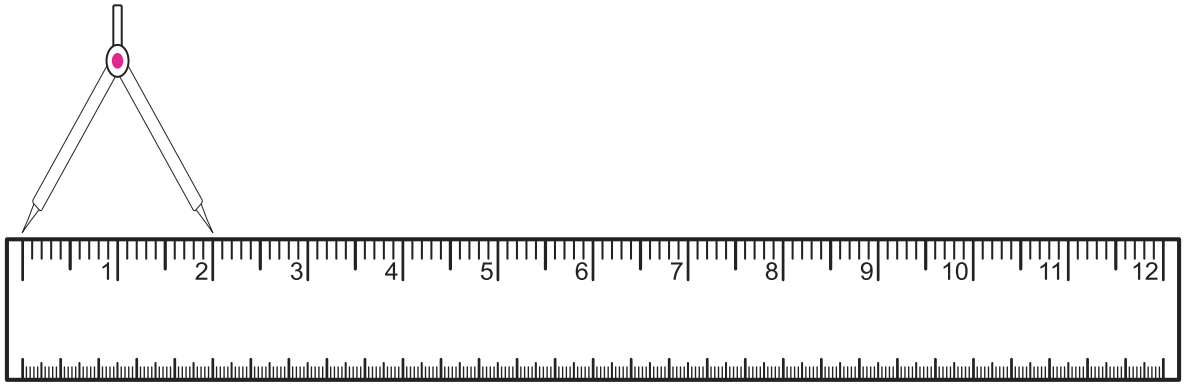
5.2 सेमी अर्थात् 5 सेमी व 2 मिमी

आप अलग–अलग लम्बाई के रेखाखण्ड खींचिए तथा उनको मापिए।

8.4 डिवाइडर की सहायता से रेखाखंड का मापन



डिवाइडर की सहायता से रेखाखंड को मापने के लिए डिवाइडर को खोल कर चित्रानुसार इसकी एक भुजा की नोक को रेखाखंड के प्रारम्भिक बिन्दु A पर तथा दूसरी भुजा की नोक को रेखा खंड के अंतिम बिन्दु B पर रखें इस प्रकार खुले डिवाइडर को पटरी पर इस प्रकार रखें कि इसकी एक नोक पटरी के शून्य पर रहे और दूसरी नोक पटरी के जिस भाग पर रहेगी वह भाग उस रेखाखंड की लम्बाई दर्शाता है।



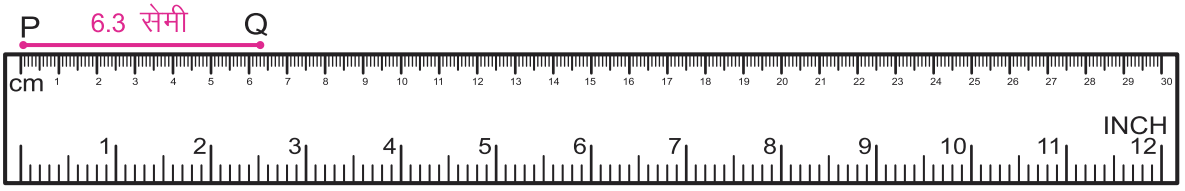


www.rajteachers.com

करो और सीखो ◆ कंकू कहती है डिवाइडर से रेखाखंड मापना अधिक सटीक है बजाय स्केल के। आप कंकू की बात से सहमत हैं या नहीं अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए। (विद्यालय में उपलब्ध गणित किट का उपयोग कीजिए।)

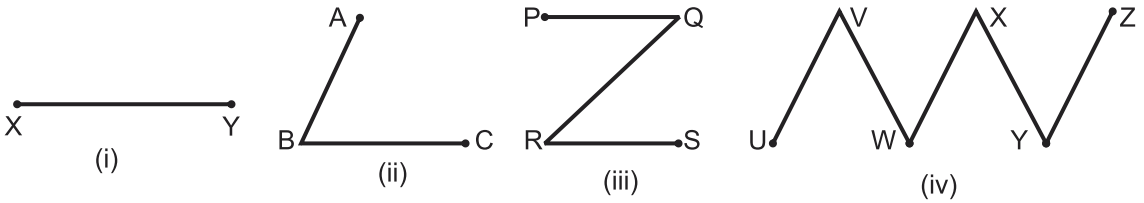
8.5 रेखाखंड की रचना

दिए गए माप का रेखाखंड स्केल की सहायता से बनाते हैं। इसके लिए दिए गए चित्रानुसार स्केल के 0 (शून्य) सेमी वाले भाग का पहला बिन्दु अंकित करते हैं तथा जिस नाप का रेखाखंड खींचना होता है स्केल के उस नाप पर दूसरा बिन्दु अंकित करते हैं। दोनों बिन्दुओं को स्केल के सहारे मिला कर उस नाप का रेखाखंड बना लेते हैं। चित्र में 6.3 सेमी नाप का रेखाखंड PQ बनाया गया है।



प्रश्नावली 8.1

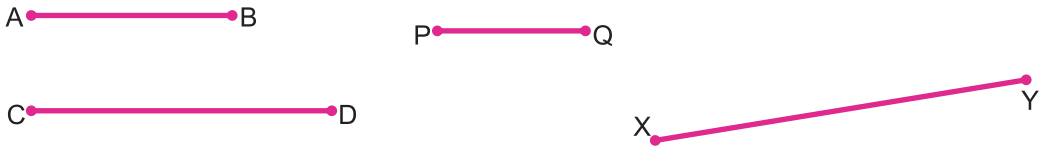
1. दिए गए चित्रों में रेखाखंडों के नाम लिखिए।



2. स्केल का प्रयोग करके दी गई लम्बाई का रेखाखंड खींचिए।

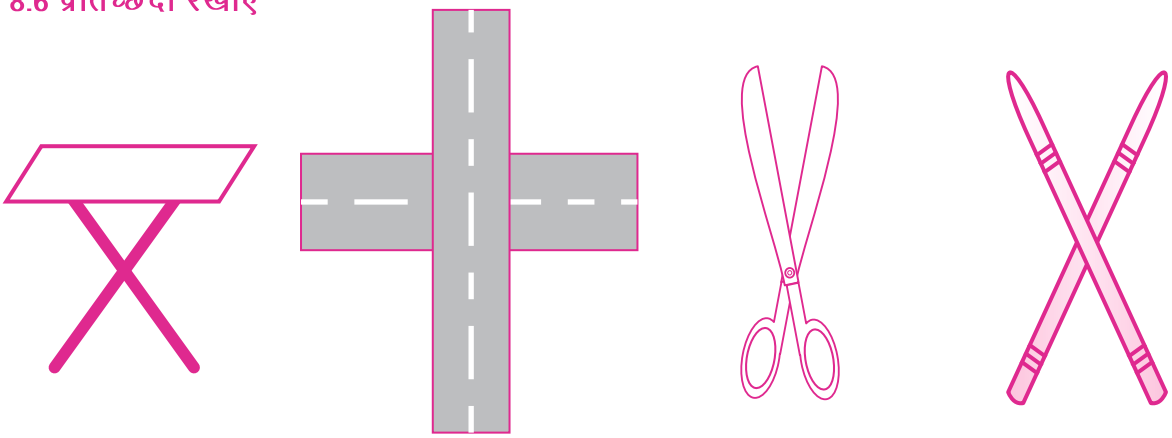
(i) 4.0 सेमी (ii) 3.7 सेमी (iii) 7.5 सेमी (iv) 5.1 सेमी

3. अपने पेन के नाप का रेखाखंड खींचिए उसे स्केल से नाप कर सही लम्बाई लिखिए।
4. स्केल की सहायता से 3.2 सेमी का एक रेखाखंड खींचिए एक अन्य रेखाखंड खींचिए जो दिए गए रेखाखंड का दुगना हो।
5. कोई रेखाखंड AB खींचिए बिना मापे हुए AB के बराबर एक रेखा खंड की रचना कीजिए। (संकेत–डिवाइडर की सहायता से)
6. दिए गए रेखाखंडों को डिवाइडर से नाप कर स्केल पर नापिए और नाप लिखिए।

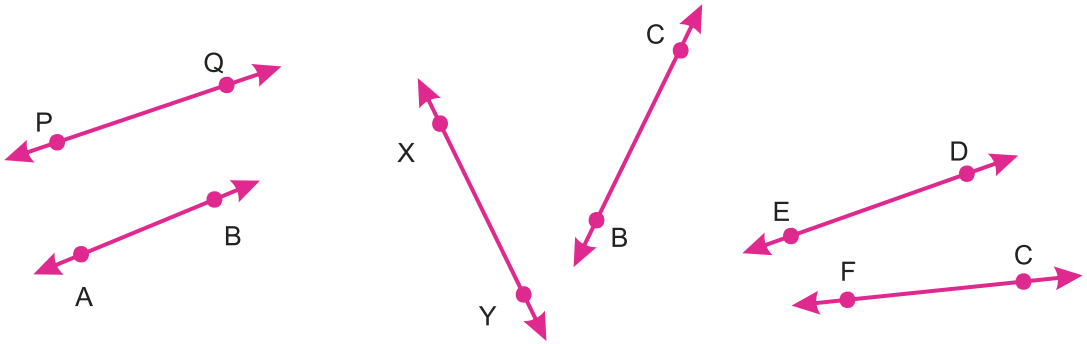


www.rajteachers.com

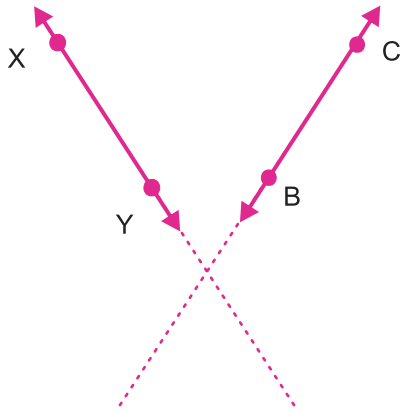
8.6 प्रतिच्छेदी रेखाएँ



ऊपर दिए गए चित्रों को ध्यान पूर्वक देखिए। हम देखते हैं कि सड़कें और डांडिया को एक रेखा द्वारा प्रदर्शित किए जा सकता है और चित्र में प्रदर्शित रेखाएँ परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर रही हैं। अतः ऐसी रेखाएँ जो किसी एक बिन्दु पर एक दूसरे को काटती हैं अर्थात प्रतिच्छेद करती हैं वे रेखाएँ **प्रतिच्छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं। तथा जिस बिंदु पर काटती हैं वह बिन्दु **प्रतिच्छेद बिन्दु** कहलाता है।

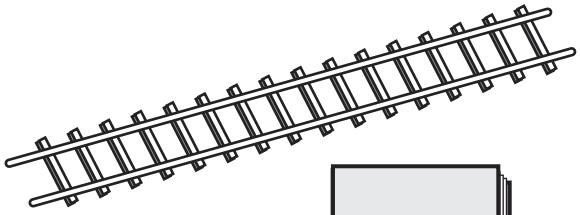


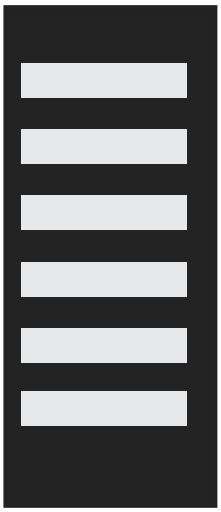
दिए गए चित्रों में क्या रेखाओं के युग्म प्रतिच्छेदी हैं? यद्यपि ये रेखा युग्म प्रतिच्छेद करते हुए नहीं दिखाई दे रहे परन्तु चूंकि रेखाओं को आगे बढ़ाया जा सकता है तो आगे बढ़ाने पर ये रेखाएँ प्रतिच्छेद करेंगी।

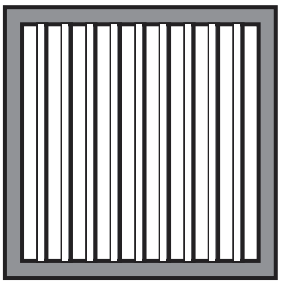


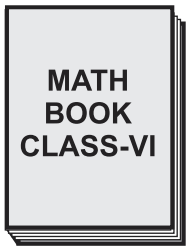
www.rajteachers.com

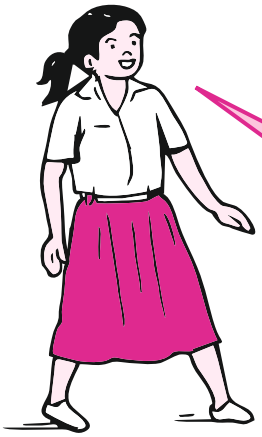
8.7 समान्तर रेखाएँ





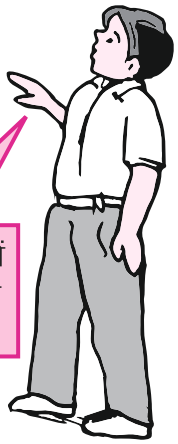




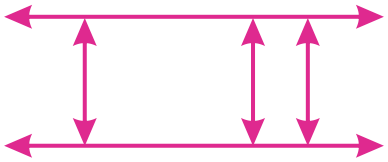


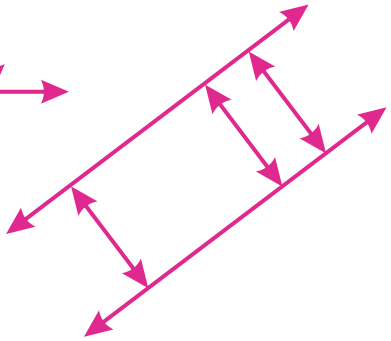
रमन देखो रेल की पटरी, खिड़की की सभी ग्रिल या जेब्रा रेखाओं के बीच की दूरी सभी समान दिखाई दे रही हैं।

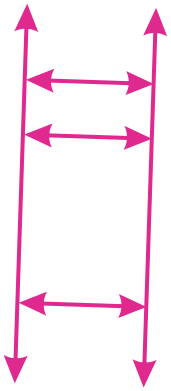
इसलिए इनके दोनों सिरे आपस में कभी नहीं मिलते हैं।



अतः वे रेखाएँ जिनके बीच की लम्बवत दूरी सदैव समान रहती है वे रेखाएँ समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं।







करो और सीखो

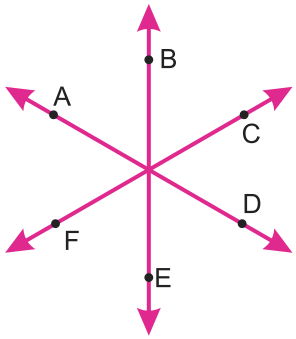
अपने दैनिक जीवन में ऐसे और भी उदाहरण ढूँढिए, जहाँ समान्तर रेखाएँ नजर आती हैं तथा उन्हें लिखिए।

www.rajteachers.com

8.8 संगामी रेखाएँ

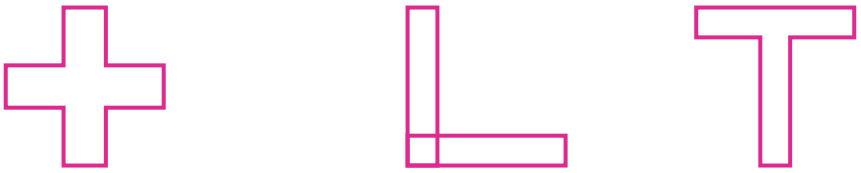
दो या दो से अधिक रेखाएँ जब एक ही बिन्दु से गुजरती हैं तो वे संगामी होती हैं। प्रत्येक प्रतिच्छेदी रेखा संगामी होती है।

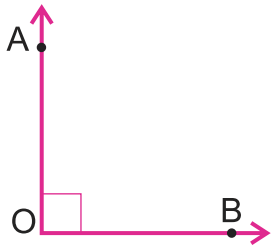
AD, BE व CF संगामी रेखाएँ हैं।



8.9 लम्बवत् रेखाएँ

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए –



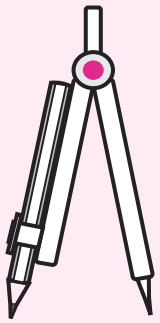


चित्र में बनी रेखाओं का अवलोकन कीजिए। क्या कोई समकोण बन रहा है? क्या वे प्रतिच्छेदी हैं?

जब दो रेखाएँ एक दूसरे से समकोण पर मिलती है तो हम कहेंगे दोनों रेखाएँ लम्बवत रेखाएँ हैं। जैसे दिए गए चित्र में OA तथा OB परस्पर लम्बवत हैं तथा इसे $OA \perp OB$ से प्रदर्शित करते हैं।

करो और सीखो

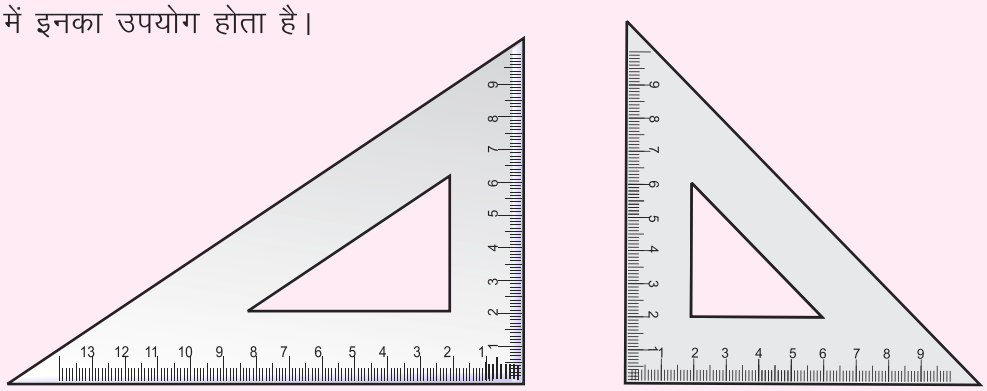
1. यदि रेखा $L \perp M$ तो क्या $M \perp L$ होगा?
2. किसी रेखा के लम्बवत कितनी रेखाएँ हो सकती हैं?
3. अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर L,N,X,Y,T पर गौर कीजिए व बताइए इनमें से कौन–कौनसे लम्बवत रेखाओं के उदाहरण हो सकते हैं?



परकार : परकार में दो सिरे होते हैं। एक सिरा नुकीला और दूसरे सिरे में पेंसिल लगाने का स्थान होता है। इसका उपयोग वृत्त खींचने एवं चाप काटने में होता है। बराबर लम्बाइयाँ अंकित करने में भी इसका उपयोग होता है।

www.rajteachers.com

सैटस्क्वेयरः दो त्रिभुजाकार आकृति के उपकरण हैं एक में शीर्षों पर कोण 45°, 45° तथा 90° है और दूसरे में यह कोण 30°, 60°, 90° होते हैं। लम्ब रेखाओं और समान्तर रेखाओं को बनाने में इनका उपयोग होता है।



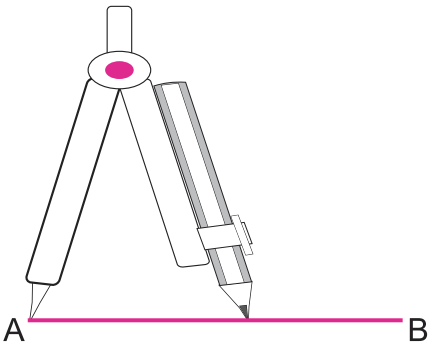
8.10 रेखाखंड का लम्बसमद्विभाजन

AB एक रेखाखंड है परकार एवं पटरी की सहायता से AB रेखा का समद्विभाजन (दो बराबर भागों में बाँटना) करने के लिए निम्नानुसार क्रिया करेंगे।

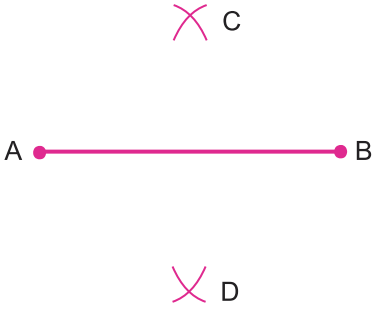
चरण 1 रेखाखंड AB बनाइए



चरण 2 AB के A बिन्दु पर परकार का नुकीला सिरा रख कर रेखाखंड के आधे से अधिक परकार को खोल कर चित्रानुसार दोनों तरफ चाप काटिए।

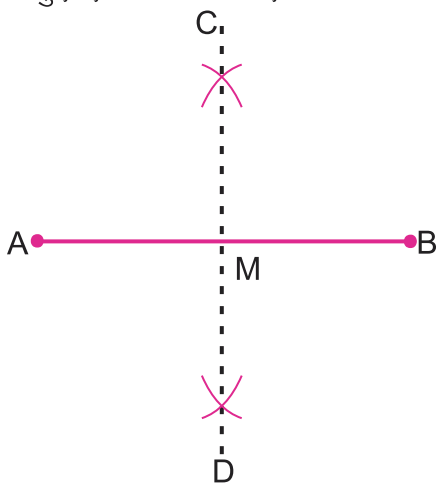


चरण 3 अब परकार को उतना ही खुला रखकर B सिरे पर नुकीला सिरा रख कर पुनः दोनों तरफ चाप काटें जो कि पूर्व में काटे गए चाप को काटेंगे। कटान बिन्दु को C व D से अंकित कीजिए।



www.rajteachers.com

चरण 4 बिन्दु C और D को मिलाते हुए एक रेखा खींचिए जो AB को M बिन्दु पर काटें।



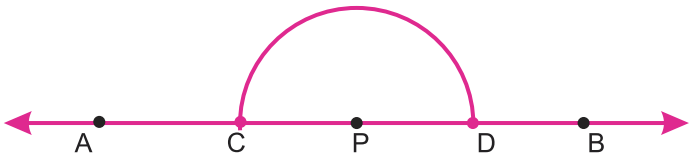
इस प्रकार CD, AB का लम्बसमद्विभाजक है M, AB का मध्य बिन्दु है।

8.10.1 रेखा पर दिए गए बिन्दु पर लम्ब खींचना

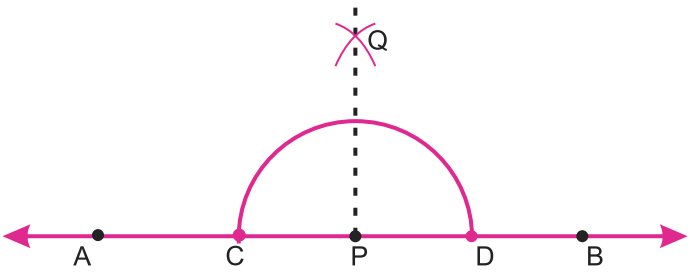
चरण 1 रेखा AB पर बिन्दु P दिया है।



चरण 2 P को केन्द्र मान कर सुविधाजनक त्रिज्या ले कर एक चाप बनाएँ जो रेखा AB को C व D पर प्रतिच्छेद करेंगे।



चरण 3 परकार की नोक C पर रख कर ऊपर की ओर एक चाप काटेंगे। फिर उसी त्रिज्या के माप का चाप D पर नोक रखकर पूर्व चाप को काटने पर बिन्दु Q प्राप्त होगा। Q व P को मिलाएँगे।

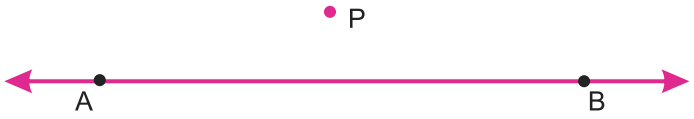


चरण 4 इस प्रकार QP , AB पर लम्ब है।

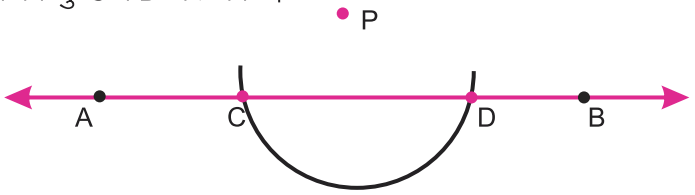
www.rajteachers.com

8.10.2 दिए गए बिन्दु से रेखा पर लम्ब डालना

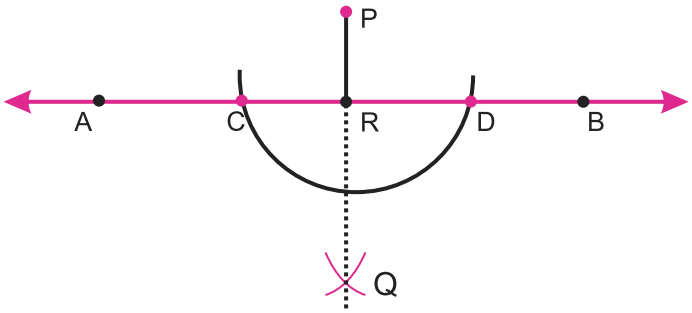
चरण 1 रेखा AB के बाहर एक बिन्दु P स्थित है।



चरण 2 बिन्दु P से परकार की सहायता से सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाएँ जो रेखा AB को दो बिन्दु C व D पर काटे।

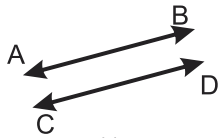


चरण 3 परकार की नोक C पर रखकर नीचे की ओर एक चाप काटेंगे। फिर उसी त्रिज्या के चाप वाले परकार की नोक D पर रख कर पूर्व चाप को काटेंगे। इससे बिन्दु Q प्राप्त होगा P को Q से मिलाने पर PR बिन्दु P से रेखा AB पर लम्ब होगा।

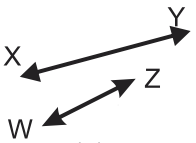


प्रश्नावली 8.2

1. निम्न चित्रों में समान्तर व प्रतिच्छेदी रेखाओं के नाम लिखिए।



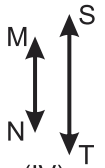
(I)



(II)



(III)



(IV)

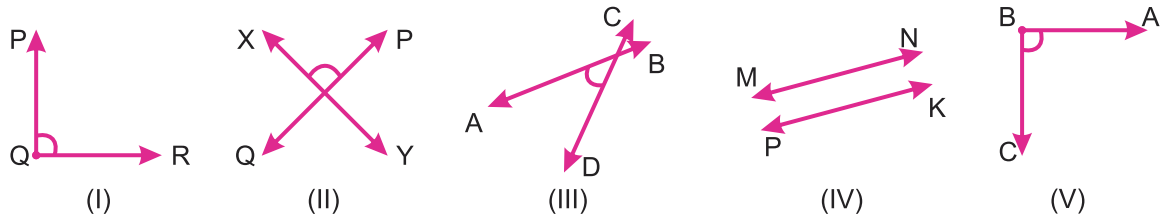
2. यदि 5 असमान लम्बाई की रेखाएँ एक बिन्दु से हो कर गुजरें तो बनने वाली आकृति में रेखाएँ कौनसी रेखाएँ कहलाती हैं ?

3. निम्नलिखित माप के रेखाखंडों के लम्ब समद्विभाजन कीजिए और प्रत्येक भाग को नाप कर लिखिए।

(i) 8 सेमी (ii) 7.6 सेमी (iii) 5.8 सेमी (iv) 6.4 सेम

www.rajteachers.com

4. निम्न चित्रों में लम्बवत रेखाओं को पहचान कर उनके नाम लिखिए।



(I) (II) (III) (IV) (V)

5. एक रेखा खंड $\overline{MN}$ खींचिए उस पर कोई बिन्दु L अंकित कीजिए। L से हो कर रेखा MN पर एक लम्ब रूलर व परकार की सहायता से खींचिए।

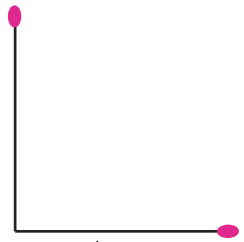
6. एक रेखाखंड AB खींचिए कोई बिन्दु R लीजिए जो AB पर ना हो, बिन्दु R से AB पर एक लम्ब खींचिए।

8.11 कोण

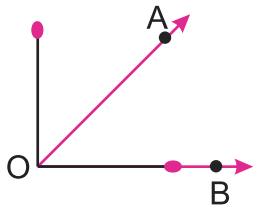
आपने कक्षा 5 में कोणों के बारे में पढ़ा है जैसे न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण।

क्रियाकलाप : 1

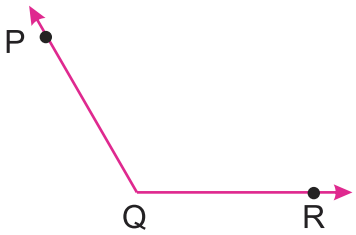
दो माचिस की तीलियाँ लीजिए इन्हें एक दूसरे के छोर पर मिला कर L आकृति बनाइए। यह समकोण के बराबर होगा। इसे हम टेस्टर की तरह काम में लेंगे। चित्र 5.7 में दर्शाए अनुसार टेस्टर को कोण ∠AOB की भुजा AB पर रखते हैं। चूंकि कोण ∠AOB समकोण से छोटा है अतः न्यून कोण होगा। पुनः टेस्टर को कोण ∠PQR की भुजा QR पर इस प्रकार रखें कि टेस्टर का कोना Q पर ठीक से आए। चूंकि ∠PQR समकोण से बड़ा है अतः यह अधिक कोण होगा।



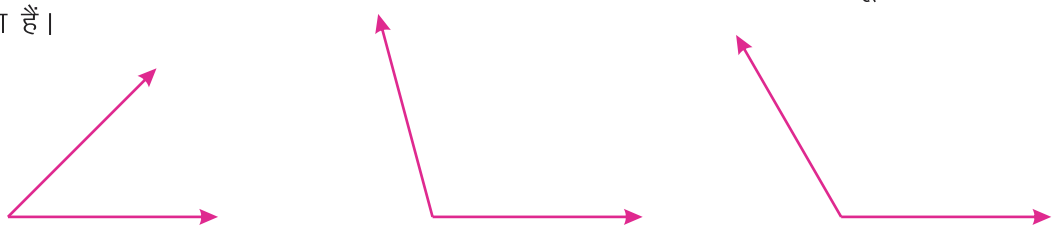
(i)



(ii)

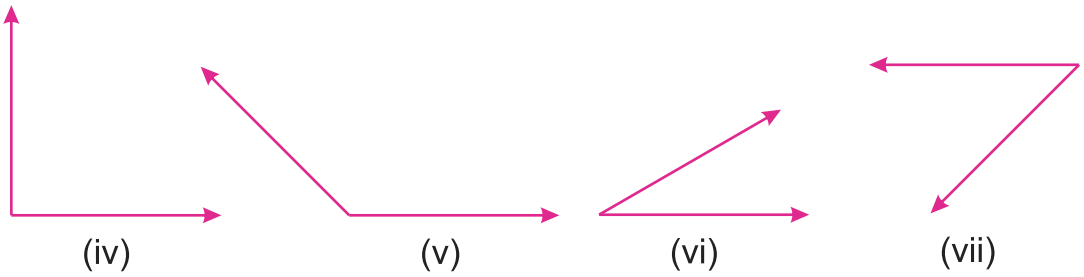


नीचे दिए गए कोणों को समकोण टेस्टर से माप कर बताइए कि ये कोण न्यून, अधिक या समकोण हैं।



(i) (ii) (iii)

www.rajteachers.com



कक्षा के छात्र इन कोणों को देखते हैं और चर्चा करते हैं।

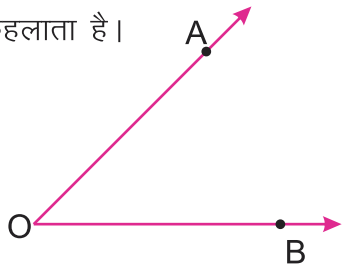
आयुषः प्रत्येक कोण की कितनी किरणें हैं?

रमेशः सभी कोणों की दो–दो किरणें हैं।

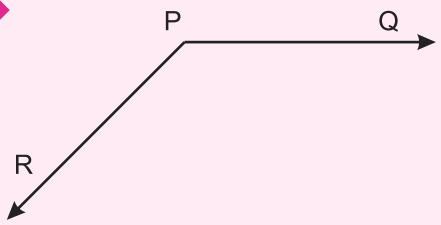
आयुषः परन्तु इसका प्रारम्भिक बिन्दु तो एक ही है।

अध्यापिकाः हाँ बच्चों, यदि एक ही प्रारम्भिक बिन्दु से दो किरणें निकलती हैं तो कोण की आकृति बनती है तथा वह बिन्दु **कोण का शीर्ष** कहलाता है।

चित्र में भुजाएँ OA व OB है तथा शीर्ष 'O' है।

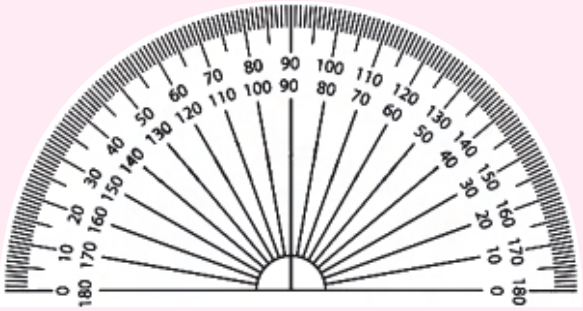


करो और सीखो



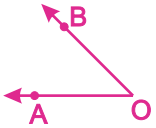
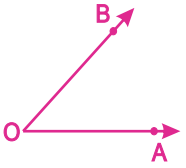
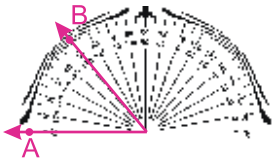
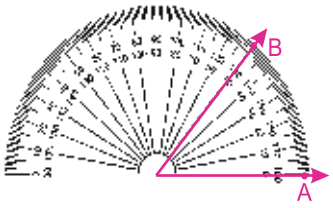
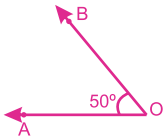
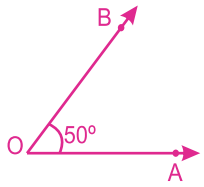
चित्र में
भुजाएँ .....
शीर्ष .....

चाँदे का परिचय



कोणों की सही तुलना एवं मापन के लिए एक उपकरण की आवश्यकता होती है जिसे चाँदा (D) कहते हैं। अपने ज्यामिति बॉक्स में आप इसे देख सकते हैं। चित्र में दिए गए चाँदे को ध्यान से देखिए इसमें आपको दो मापन मिलेंगे। भीतरी मापक एवं बाहरी मापक। समकोण को दर्शाने वाली रेखा पर 90° अंकित है। इसके दोनों ओर दो प्रकार के कोण होते हैं घड़ी की दिशा में तथा विपरीत दिशा में बनने वाले कोण। दोनों दिशाओं में 0 से 180° तक अंकित होता है प्रत्येक भाग को एक डिग्री कहते हैं। अब हम चाँदे के प्रयोग से कोण को मापना सीखेंगे।

www.rajteachers.com

घड़ी की दिशा में कोण	चरण	घड़ी की विपरित दिशा में कोण
	1. कोण को पहचानिए न्यून कोण है अथवा अधिक कोण है।	
	2. चाँदे का केन्द्र बिंदु कोण के शीर्ष पर रखिए।	
	3. शीर्ष को केन्द्र बिंदु से हटाए बिना चाँदे को व्यवस्थित कीजिए, जिससे कि उसकी एक भुजा आधार रेखा के साथ हो।	
	4. मापन रेखा को देखिए जहाँ आधार रेखा 0° दर्शाती है।	
	5. इस कोण को पढ़िए इसका दूसरा सिरा मापन रेखा को पार करके AOB=50° बनाता है।	

8.11.1 कोणों का माप के आधार पर वर्गीकरण

प्रयास कीजिए।

आपने क्रियाकलाप 1 में कोणों को समकोण टेस्टर की सहायता से मापा तथा उन्हें न्यून कोण, अधिक कोण व समकोण में बाँटा पुनः उन्हें चाँदे की सहायता से माप कर सारणी में लिखिए।

न्यून कोणों के माप					
अधिक कोणों के माप					
समकोण का माप					

इस गतिविधि के आधार पर हमने पाया कि सभी न्यून कोण 90° से कम माप के एवं अधिक कोण 90° से अधिक व 180° से कम माप के हैं।

आयुष – अर्थात् 0° से 90° के मध्य के कोण **न्यून कोण** कहलाते हैं।

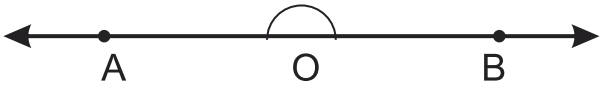
मनन – और 90° का कोण **समकोण** कहलाता है।

अध्यापिका – हाँ, तथा 90° से 180° के मध्य के कोण **अधिक कोण** कहलाते हैं।

www.rajteachers.com

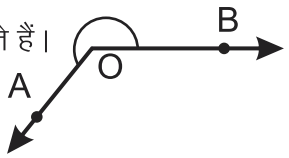
आयुष – 180° का कोण क्या कहलाता है?

अध्यापिका – 180° के कोण को **सरल कोण** कहते हैं



आयुष – यह तो सरल कोण से भी बड़ा है।

अध्यापिका– 180° से बड़े कोण को **वृहत या प्रतिवर्ती कोण** कहते हैं।



8.11.2 कोणों की रचना

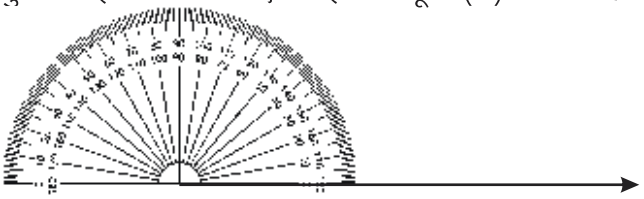
(i) चाँदे की सहायता से दिए गए माप का कोण बनाना।

70° के कोण को बनाने के लिए

चरण 1 सबसे पहले एक किरण AB खींचिए।

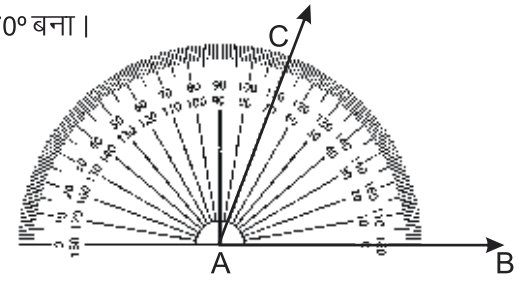


चरण 2 चाँदे को आधार रेखा के मध्य बिंदु A पर इस प्रकार रखिए कि इसका शून्य (0°) वाला चिह्न किरण AB के अनुदिश रहे।



चरण 3. बिंदु B के पास के शुन्य से प्रारंभ करते हुए 70° के चिह्न के सामने बिंदु C अंकित कीजिए।

चरण 4. बिंदु A को C से मिलाइएँ। इस प्रकार $\angle CAB = 70°$ बना।



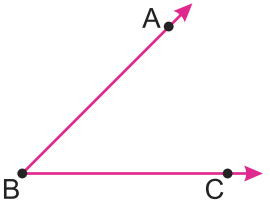
करो और सीखो

अब आप भी नीचे दिए गए माप के कोण बनाकर देखिए।

(i) $\angle ABC = 110°$

(i) $\angle PQR = 40°$

(ii) परकार की सहायता से दिए गए कोण के बराबर कोण बनाना



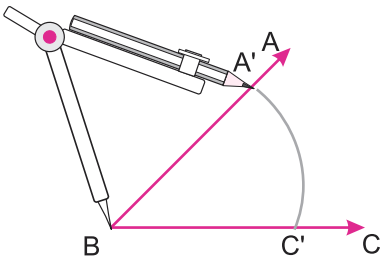
कोण $\angle ABC$ दिया है जिसका माप ज्ञात नहीं है।

चरण 1 एक रेखा ℓ खींचिए उस पर एक बिंदु P अंकित करें।

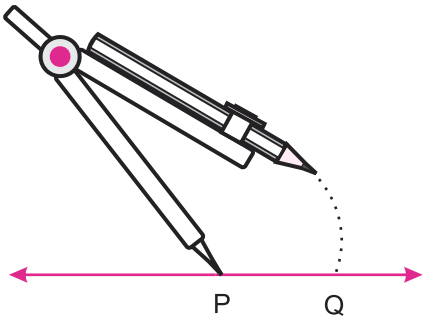


www.rajteachers.com

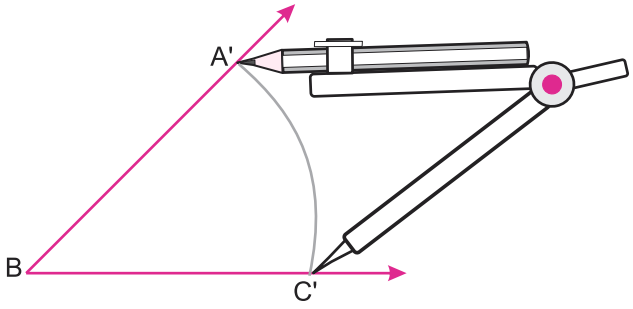
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को कोण ∠ ABC के शीर्ष B पर रखकर एक चाप खींचिए जो ∠ ABC की भुजाओं को जिन बिंदुओं पर काटता है उसे बिंदु A' व C' नाम दीजिए।



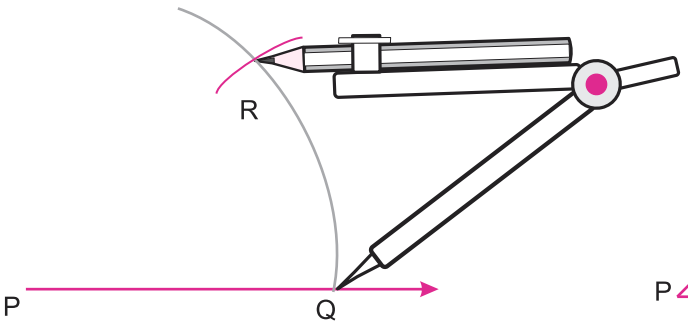
चरण 3 परकार के इस फैलाव के साथ उसके नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप बनाइए जो रेखा को बिंदु Q पर काटता है।

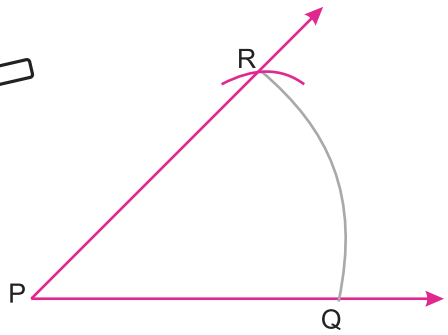


चरण 4 परकार को कोण ∠ABC, में A'C' के बराबर लम्बाई में खोले।



चरण 5 Q को केन्द्र मानकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु Q पर रखकर एक चाप लगाएँ जो पूर्व में लगाए चाप को बिंदु R पर काटता है। बिन्दु P तथा R को मिलाने पर अभीष्ट कोण ∠PQR प्राप्त होता है।





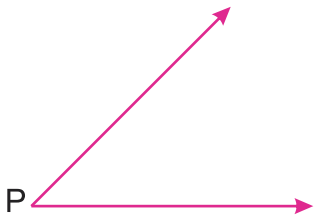
अतः ∠ABC तथा ∠PQR अभीष्ट कोण हैं।

www.rajteachers.com

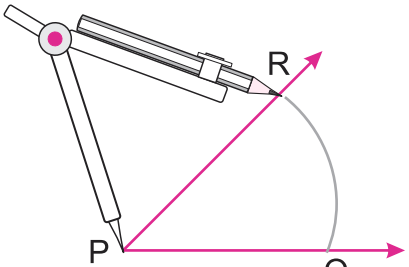
8.11.3 परकार की सहायता से दिए गए कोण का समद्विभाजन

चित्र (i) में ∠P दिया है।

चरण 1 बिंदु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप लगाए जो कोण P की भुजाओं को Q व R पर काटे। चित्र (ii)



चित्र (i)

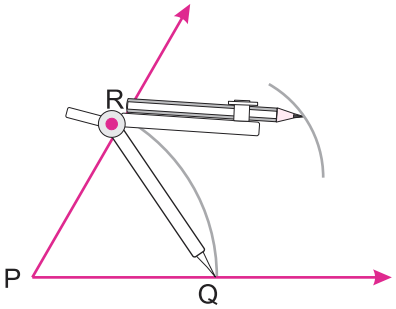


चित्र (ii)

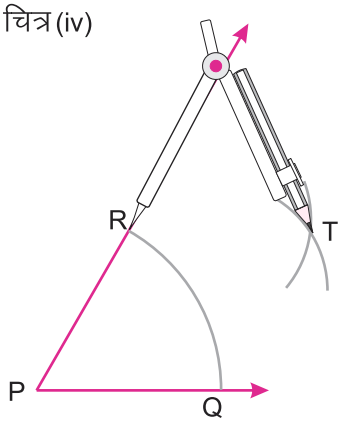
चरण 2 Q को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप कोण P के फैलाव क्षेत्र (अभ्यन्तर) में लगाएँ। चित्र (iii)

चरण 3 इसी प्रकार R को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाए जो पूर्व में लगाए चाप को काटे।

दोनों चाप के प्रतिच्छेद बिंदु को T से प्रदर्शित करें। चित्र (iv)

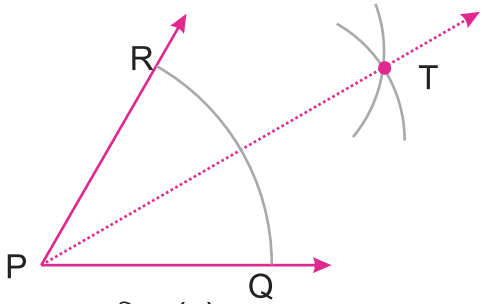


चित्र (iii)



चित्र (iv)

चरण 4 T व P को मिलाने पर कोण P का समद्विभाजक TP प्राप्त होता है। चित्र (v)



चित्र (v)

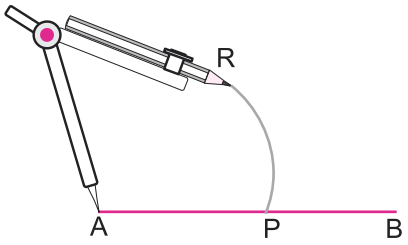
www.rajteachers.com

8.11.4 परकार की सहायता से कोणों की रचना

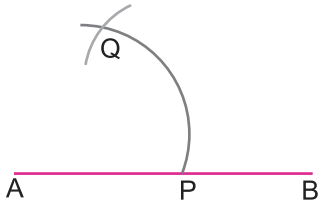
8.11.4 (i) 60°, 120°, व 180° की रचना करना

(A) 60° के कोण की रचना

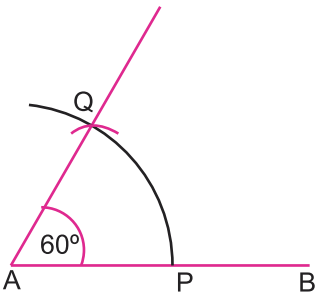
चरण 1 एक रेखाखण्ड AB खींचिए उपयुक्त त्रिज्या का नाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु A पर रखकर एक चाप खींचिए जो रेखाखण्ड AB को बिंदु P पर काटता है।



चरण 2 बिंदु P पर नुकीले सिरे को रखकर उसी त्रिज्या के माप का चाप पूर्व चाप पर बनाए। दोनों चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को Q अंकित करें।

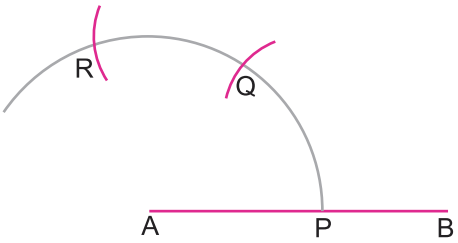


चरण 3 AQ को मिलाने पर ∠QAB = 60° बनता है।

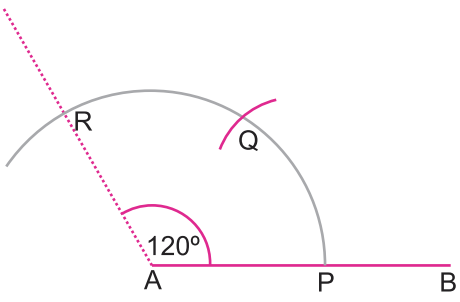


(B) 120° के कोण की रचना

चरण 1 ऊपर के चित्र पर आगे की क्रिया करते हुए उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को Q पर रखकर एक ओर चाप काटे जो पूर्व में लगाए चाप को बिंदु R पर काटता है।



चरण 2 AR को मिलाने पर ∠RAB = 120° प्राप्त होता है।



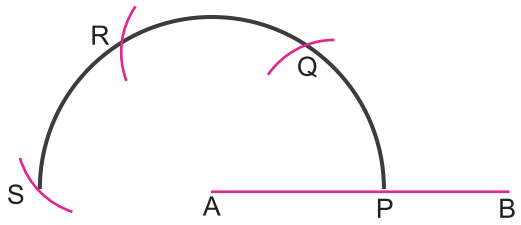


www.rajteachers.com

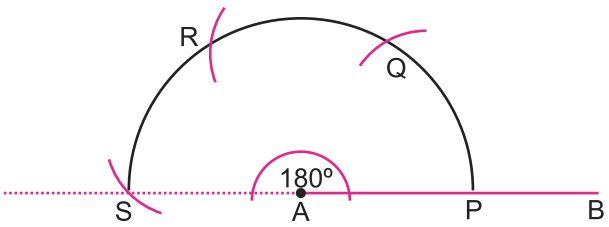
(C) 180° के कोण की रचना

ऊपर के चित्र में ओर आगे की क्रिया करते हुए

चरण 1 उसी त्रिज्या के माप का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु R पर रखकर एक चाप और काटे जो पूर्व में बनाए चाप को S पर काटता है।



चरण 2 SA को मिलाने पर ∠SAB =180° प्राप्त होता है

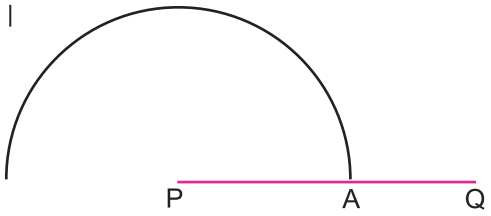


8.11.4 (ii) 30°, 45°, 90°, के कोण की रचना

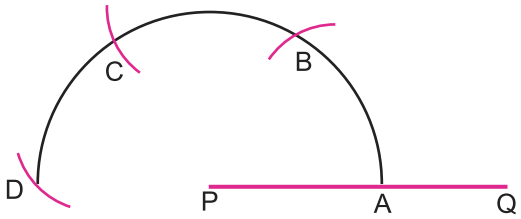
ऊपर 60°, 120°, 180°, के कोणों की रचना के आधार पर आप 60° के समद्विभाजन से 30°, 60° और 120° के बीच के कोण का समद्विभाजन से 90°, तथा 30° और 60° के बीच कोण का समद्विभाजन करने से 45° के कोण की रचना की जा सकती है।

(A) 30° के कोण की रचना

चरण 1 रेखाखण्ड PQ खींचिए उपयुक्त त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप खींचिए।

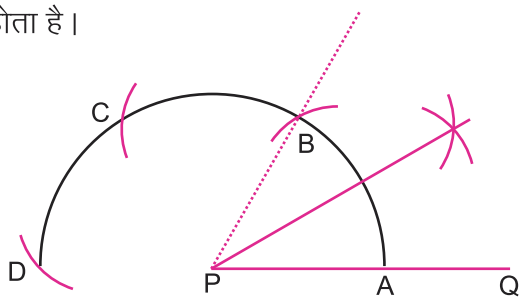


चरण 2 उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु A, B और C पर रखकर चाप काटिए जो पूर्व में बनाए चाप को बिंदु B, C, D पर काटता हो।



www.rajteachers.com

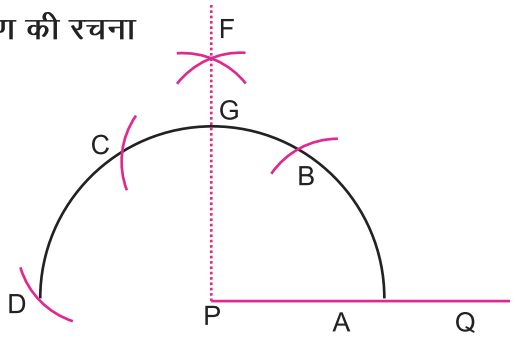
चरण 3 PB को मिलाने पर ∠BPA = 60° प्राप्त होता है इसका समद्विभाजन करने पर 30° का कोण प्राप्त होता है।



180° का अर्द्धक करने पर भी 90° प्राप्त कर सकते है।

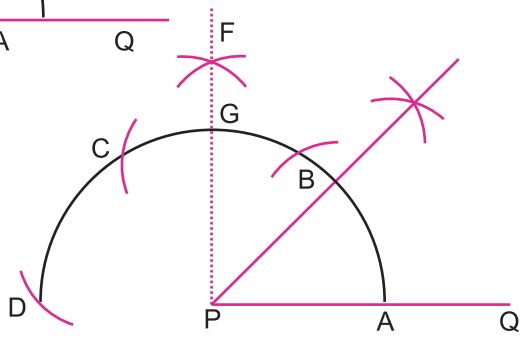
इसी प्रकार कोण ∠ BPC का समद्विभाजन करने पर 90° का कोण प्राप्त होता है कोण ∠FPQ = 90°।

(B) 90° के कोण की रचना



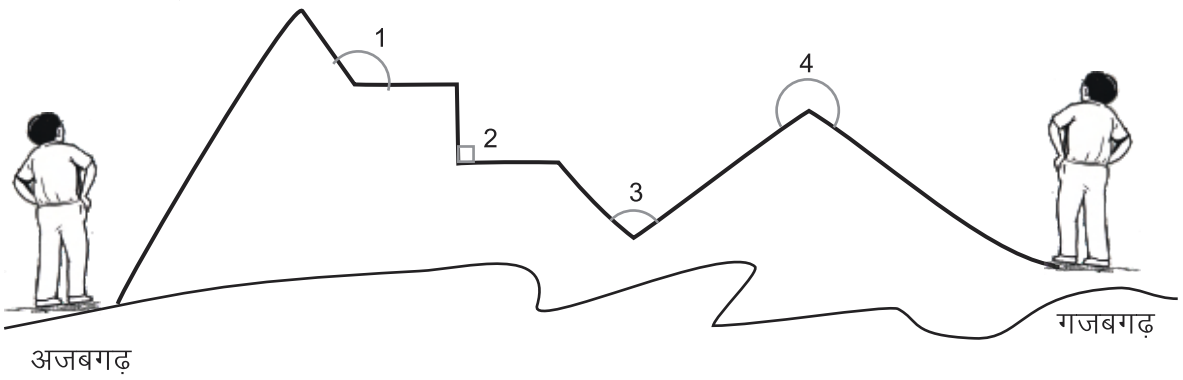
(c) 45° के कोण की रचना

90° के कोण के समद्विभाजन द्वारा 45° के कोण की रचना करते है।



प्रश्नावली 8.3

1. गाँव अजबगढ़ से गजबगढ़ के बीच का रास्ता निम्न रूप से बना है। बनने वाले कोण ∠1,2,3,4 का नाम लिखिए।



www.rajteachers.com

2. अपनी स्वेच्छा से निम्न प्रकार के कोण अपनी कॉपी में बनाइए और उन्हें चाँदे से नापकर लिखिए।

(i) अधिक कोण (ii) सरल कोण

(iii) न्यून कोण (iv) समकोण

3. चाँदे की सहायता से निम्नलिखित नाप के कोण बनाइए।

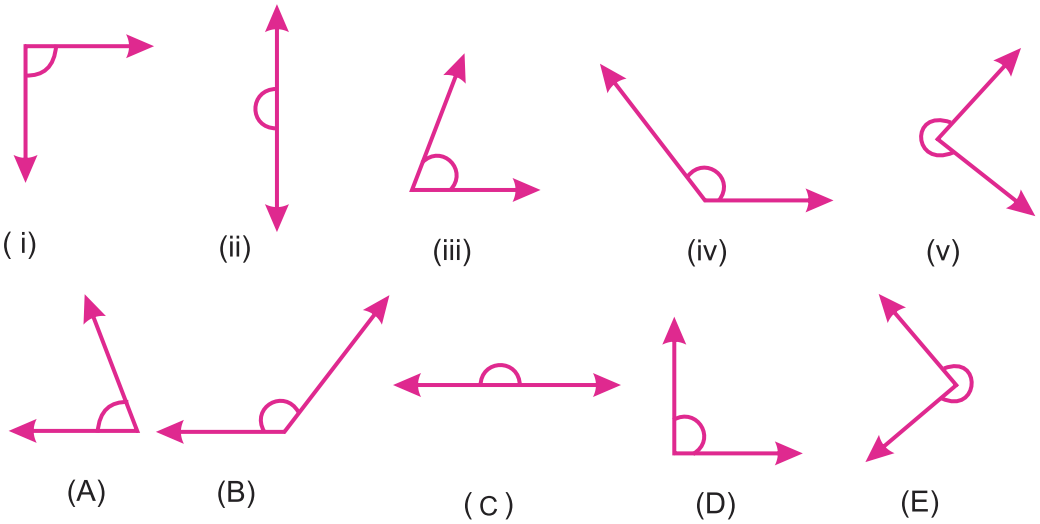
(i) 45^0 (ii) 90^0 (iii) 72^0 (iv) 105^0

(v) 134^0 (vi) 180^0 (vii) 20^0 (viii) 21^0

4. परकार व रूलर की सहायता से निम्न कोण बनाइए।

(i) 60^0 (ii) 120^0 (iii) 180^0 (iv) 90^0 (v) 45^0

5. अवलोकन द्वारा बताइए कि निम्न चित्रों में कौन–कौन से जोड़े समान है।



8.12 वृत्त

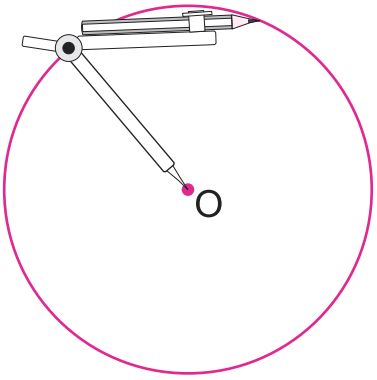
आपने अपने घर एवं परिवेश में बहुत सी आकृतियाँ देखी होगी जिनमें कुछ आकृतियाँ जैसे चूड़ी, पहिया, टायर, थाली, चकला, तथा परात इत्यादि जैसी आकृतियाँ वृत्ताकार होती है।

अब एक चुड़ी लेकर अपनी कॉपी के पृष्ठ पर रखकर उसके चारों ओर पेंसिल घुमाकर आकृति बनाइए तथा देखिए ये आकृति कैसी है?

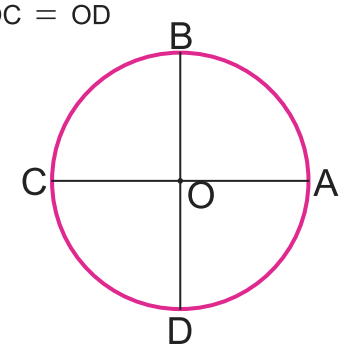
8.12.1 वृत्त की रचना

परकार की उपयुक्त लम्बाई खोलकर उसके नुकीले सिरे को अपनी कॉपी में रखकर पेंसिल वाले सिरे को एक चक्कर घुमाएँ।

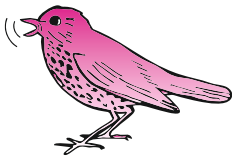
www.rajteachers.com



इस प्रकार से बनी आकृति वृत्त होती है।
जहाँ नुकीला सिरा रखकर एक चक्कर घुमाया उसे O से प्रदर्शित करें तो घेरे पर स्थित किसी भी बिंदु की O से दूरी सदैव समान रहती है।
OA = OB = OC = OD



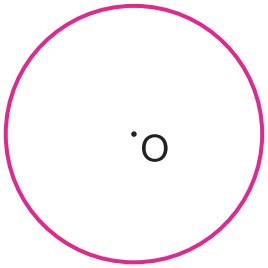
वृत्त वह आकृति है जिस पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस तल में लिए गए एक निश्चित बिंदु से सदैव समान दूरी पर होता है।



8.12.2 वृत्त के भाग

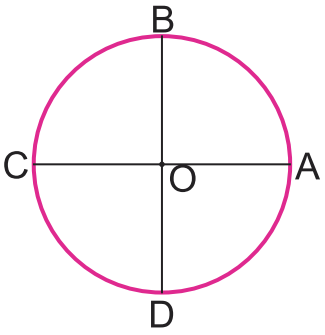
वृत्त का केन्द्र, त्रिज्या व व्यास

(i) केन्द्र परकार से बनाए गए वृत्त के चित्र में जिस बिंदु पर परकार के नुकीले सिरे को रखा वह वृत्त का केन्द्र होता है।
चित्र में बिंदु O वृत्त का केन्द्र है।



किसी तल में लिया गया वह निश्चित बिंदु जिसके चारों और वृत्त खींचा गया हो, उस **वृत्त का केन्द्र** कहलाता है।

(ii) त्रिज्या परकार से बनाए गए चित्र में परकार की नोक के स्थान पर O तथा पेंसिल की नोक, रखने वाले स्थान पर A लिखिए और OA को मिलाइए। OA वृत्त की त्रिज्या है। वृत्त पर अन्य बिंदु B, C, D लेकर OB, OC, OD को मिलाकर इन्हें मापकर देखिए।
यहाँ OA = OB = OC = OD
इस प्रकार वृत्त के केन्द्र से वृत्त के किसी भी बिंदु को मिलाने पर प्राप्त दूरी सदैव समान रहती है।

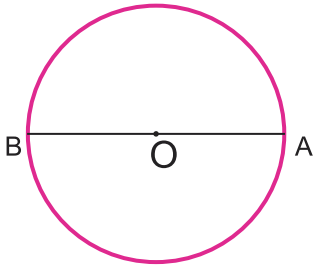




www.rajteachers.com

वृत्त के केंद्र को वृत्त पर स्थित किसी भी बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड की लम्बाई को **वृत्त की त्रिज्या** कहते हैं।

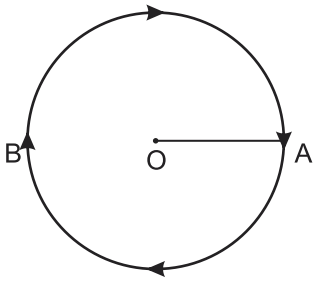
(iii) व्यास त्रिज्या OA को O से B तक बढ़ाने पर व्यास AB प्राप्त होता है। व्यास त्रिज्या का दुगुना होता है



वह रेखाखण्ड जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है तथा उस वृत्त की परिधि को दोनो ओर के दो बिंदुओं पर काटता है। **वृत्त का व्यास** कहलाता है।

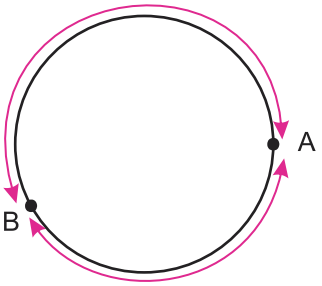
(iv) वृत्त की परिधि

वृत्त बनाने के लिए पेंसिल को A से चारों ओर घुमाते हुए पुनः A पर लाने पर तय की गई दूरी वृत्त की परिधि कहलाती है। इस प्रकार परिधि वृत्त का पूरे एक चक्कर की दूरी होती है।

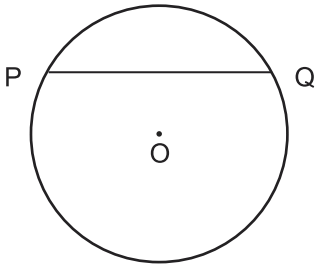


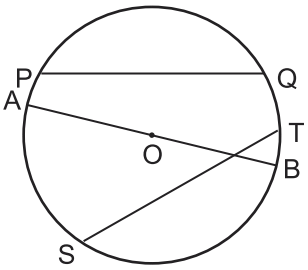
(v) वृत्त चाप

दिए गए वृत्त में परिधि पर स्थित दो बिंदु A व B है। A तथा B वृत्त की परिधि को दो भागों में बाँटते है ये दोनों भाग वृत्त चाप कहलाते हैं।



(vi) जीवा वृत्त की परिधि पर दो बिंदु P व Q लेकर इन्हें मिलाइए इनसे बनने वाला रेखाखण्ड PQ वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है। इस रेखाखंड PQ को **वृत्त की जीवा** कहते है। किसी वृत्त में अनेक जीवाएँ खींची जा सकती हैं। जैसे – AB, ST आदि।

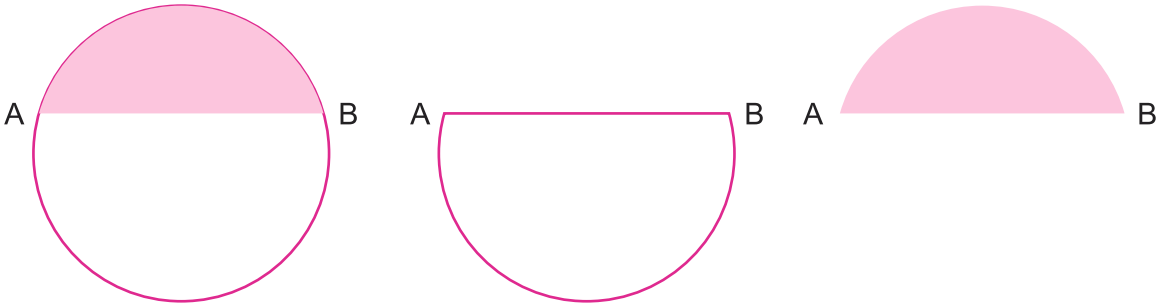




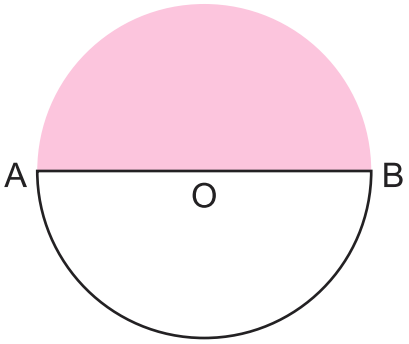
किसी वृत्त का व्यास, उस वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है।

www.rajteachers.com

(vii) वृत्तखण्ड

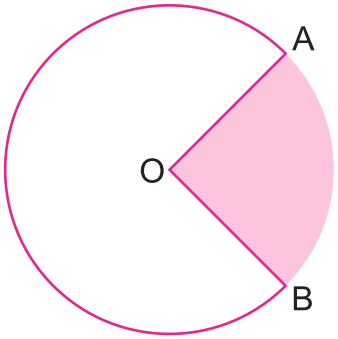


दिए गए वृत्त में AB एक जीवा है जो वृत्त को दो भागों में बाँटती है। इन दो भागों को अलग–अलग दिखाया गया है जो वृत्त के वृत्तखण्ड कहलाते है। छोटे भाग (छायांकित) को **लघुवृत्तखण्ड** व बड़े भाग को **दीर्घवृत्त खण्ड** कहते हैं। वृत्त का व्यास भी वृत्त को दो खण्डों में बांटता है ये दोनों वृत्तखण्ड बराबर होते है। अतः व्यास द्वारा बना वृत्तखण्ड वृत्त का आधा भाग होता है इनमें से प्रत्येक वृत्तखण्ड को **अर्द्धवृत्त** कहते हैं।



(viii) त्रिज्यखंड

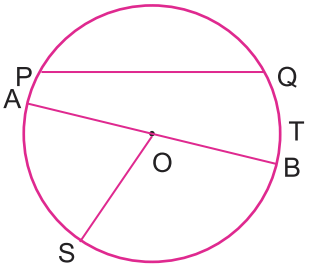
दिये चित्र में OB व OA वृत्त की दो त्रिज्याएँ है। इन त्रिज्याओं से वृत्त के दो खंड बनते है। एक छायांकित व दूसरा अछायांकित है जिन्हें AOB के नाम से दर्शाया गया है। इन्हें वृत्त के त्रिज्यखंड कहते हैं। छायांकित भाग **लघुत्रिज्यखंड** तथा अछायांकित भाग **दीर्घ त्रिज्यखंड** कहलाता है।



www.rajteachers.com

प्रश्नावली 8.4

1. वृत्त के चित्र को देखकर निम्न नाम लिखिए।



त्रिज्या = ----------

व्यास = ----------

जीवा = ----------

केन्द्र = ----------

2. सत्य / असत्य कथन बताइए

(i) वृत्त का प्रत्येक व्यास उसकी एक जीवा भी होती है।

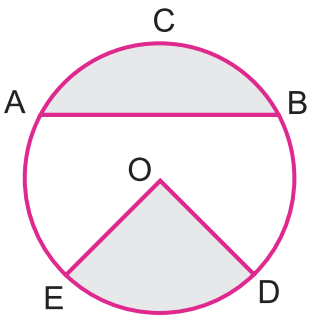
(ii) वृत्त की प्रत्येक जीवा उसका एक व्यास भी होती है।

(iii) वृत्त के दो व्यास अवश्य प्रतिच्छेद करेंगे।

(iv) वृत्त का केन्द्र सदैव उसकी परिधि पर स्थित किसी भी बिन्दु से समान दूरी पर होता है।

(v) प्रत्येक वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का आधा होता है।

3. चित्र देखकर छायांकित भागों के नाम लिखिए।



छायांकित ACB = ...

छायांकित EOD = ...

4. कोई वृत्त बनाइए और अंकित कीजिए।

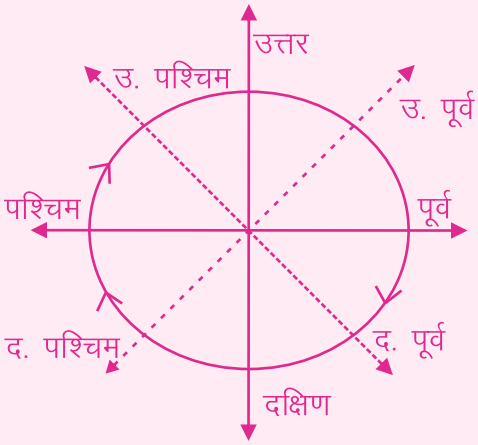
(i) केन्द्र (ii) त्रिज्या (iii) व्यास

(iv) एक चाप (v) एक त्रिज्यखण्ड (vi) एक वृतखण्ड

www.rajteachers.com

करो और सीखो

1. चित्र में घड़ी की दिशानुसार चलने पर बताइए।
   (i) पूर्व से दक्षिण पूर्व तक बनने वाले कोण का मान।
   (ii) पूर्व से दक्षिण पश्चिम तक बनने वाले कोण का मान।
   (iii) पूर्व से पश्चिम तक पहुँचने में कितने समकोण बनते है ?
   (iv) दक्षिण के बाद तीन समकोण घूमने पर किस दिशा पर पहुँचते है?



हमने सीखा

1. बिंदु एक स्थिति निर्धारित करता है। उसे सामान्यतः अंग्रेजी के बड़े अक्षर से व्यक्त किया जाता है।
2. दो बिंदुओं को जोड़ने वाला सबसे छोटा रास्ता एक रेखाखंड दर्शाता हैं। बिंदु A और B को मिलाने वाले रेखाखंड को AB से दर्शाते हैं। AB और BA दोनों एक ही रेखाखंड को दर्शाते हैं।
3. जब एक रेखाखंड जैसे AB को दोनों तरफ बिना किसी अंत के विस्तृत किया जाता है तो हमें एक रेखा प्राप्त होती है। इसे AB से व्यक्त किया जाता है। इसे कभी–कभी l जैसे अक्षर से भी व्यक्त किया जाता है।
4. दो विभिन्न रेखाएँ जब एक दूसरे को किसी एक बिंदु पर मिलती या काटती है तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती है।
5. दो रेखाएँ जब एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती अर्थात नहीं काटती है, तो वे समान्तर रेखाएँ कहलाती है।
6. दो या दो से अधिक रेखाएँ जब एक ही बिंदु से गुजरती है तो वे संगामी होती है।
7. उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है। दो किरणें OA और OB कोण AOB बनाती हैं (इसे ∠BOA भी लिख सकते हैं।)
8. वृत्त वह आकृति है जिस पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस तल में लिए गए एक निश्चित बिंदु से सदैव समान दूरी पर होता है। निश्चित बिंदु वृत्त का केंद्र कहलाता है, वृत्त के केंद्र को वृत्त पर स्थित किसी भी बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड की लम्बाई को वृत्त की त्रिज्या कहते है।
9. वह रेखाखण्ड जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है तथा उस वृत्त को दोनों ओर के दो बिंदुओं पर काटता है, वृत्त का व्यास कहलाता है।
10. वृत्त के चारों ओर चली गयी दूरी उसकी परिधि कहलाती है।

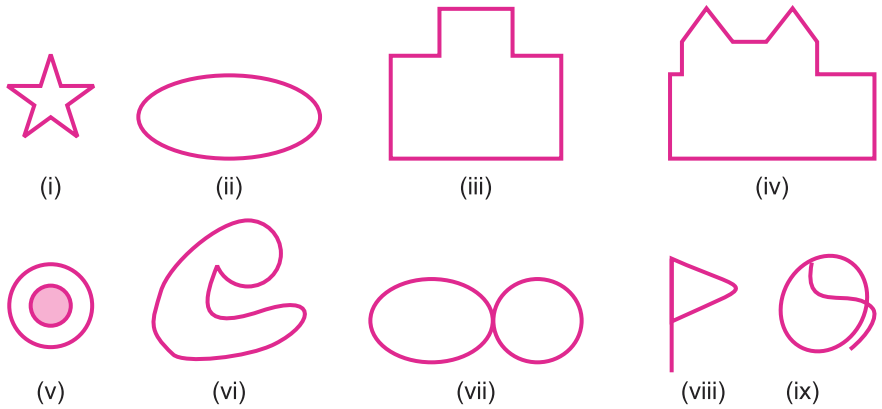
www.rajteachers.com

अध्याय 9

सरल द्विविमीय आकृतियाँ

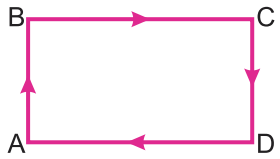
9.1 हम अपने चारों ओर कई वस्तुएँ देखते हैं। उनमें से कुछ वस्तुओं के पृष्ठ समतल जबकि कुछ के असमतल होते हैं।

नीचे कुछ समतलीय आकृतियों के चित्र दिए गए हैं उन्हें ध्यान से देखिए।



आकृति 9.1

ऐसी आकृति जिसमें पेन्सिल एक बिन्दु से चलना प्रारम्भ कर बिना उसे काटे और बिना पेन्सिल उठाए पूरी आकृति पर चलाई जा सके वह आकृति सरल आकृति कहलाती है। जैसे



आकृति 9.2

दी गई आकृति में बिन्दू A से चलकर बिना पेन्सिल उठाए और रेखाओं को काटे बिना क्रमशः B, C व D होते हुए पूरी आकृति बनाई जा सकती है। अतः आकृति सरल आकृति है वहीं आकृति (v) में आकृति बिना पेन्सिल उठाए नहीं बनाई जा सकती और आकृति (i) में इसे रेखाओं को काटे बिना बनाना संभव नहीं है। अतः ये जटिल आकृतियाँ हैं।

क्या ऐसी और जटिल आकृतियाँ आकृति 9.1 में हैं ?

9.2 खुली एवं बन्द आकृतियाँ

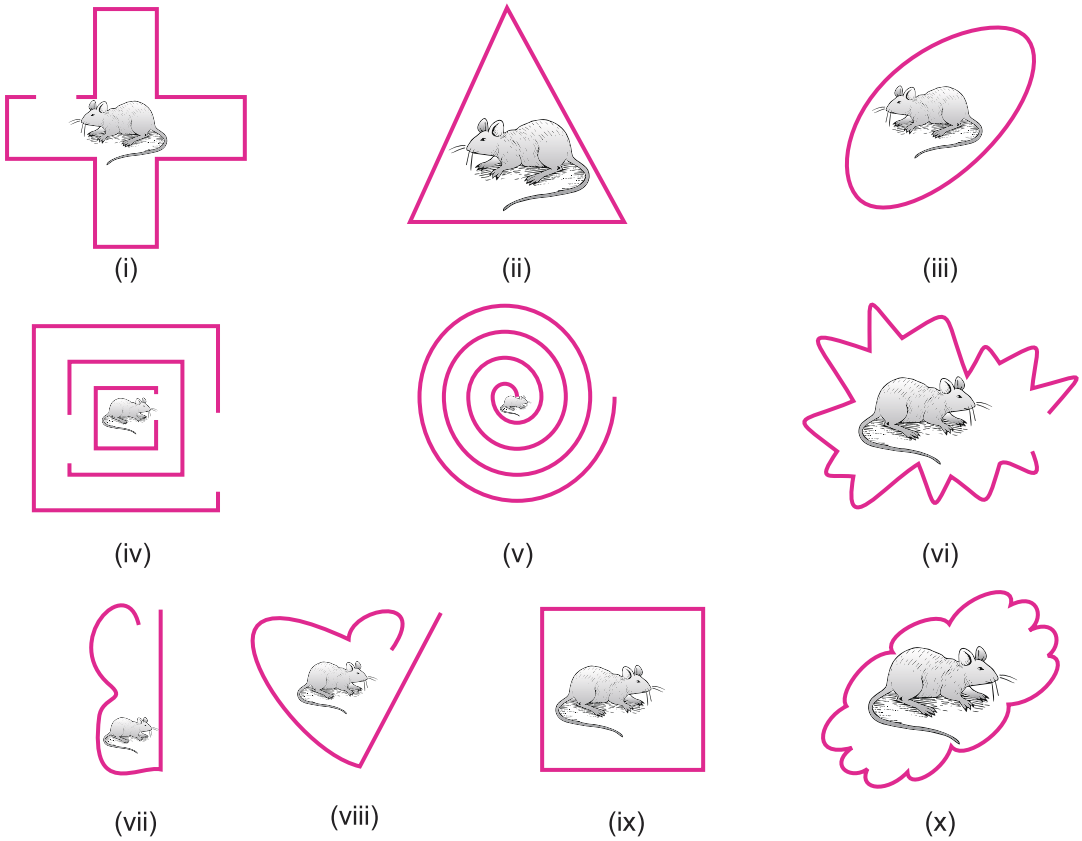
विद्यालय में बच्चे शेर और मेमना का खेल, खेल रहे थे। बच्चों ने एक दूसरे का हाथ पकड़ कर एक बड़ा सा गोला बना लिया था। यह गोला एक पिंजरा था। एक बच्चा शेर बनकर इस गोले (पिंजरा) के इर्द गिर्द दौड़ रहा था और एक नन्हा बच्चा मेमना बना था वह पिंजरे के अन्दर सुरक्षित था। शेर अन्दर घुसने का रास्ता देख रहा था लेकिन घुस नहीं पा रहा था। आप बताइए ऐसा क्यों हो रहा था?

www.rajteachers.com



आकृति 9.3

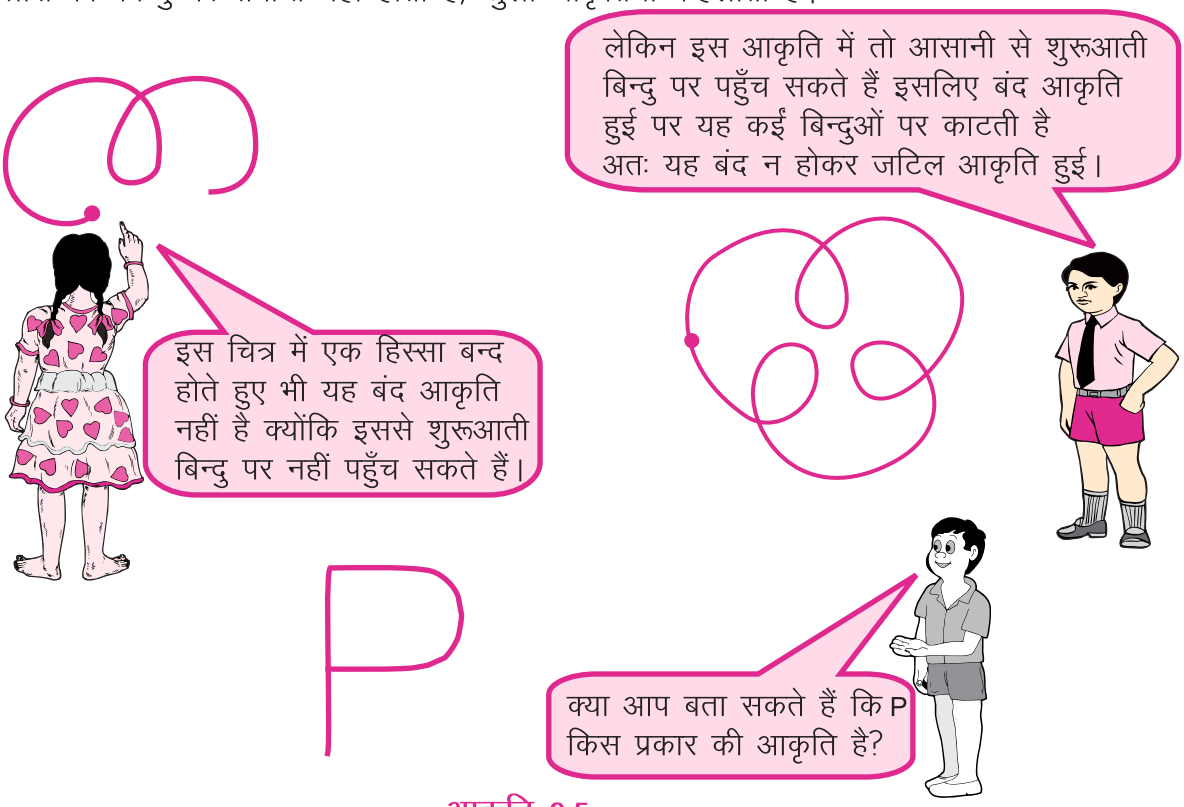
नीचे प्रत्येक आकृति में चूहा है आप पता लगाओ कि चूहा किन–किन आकृतियों से बाहर निकल जाएगा–



आकृति 9.4

www.rajteachers.com

आकृति (ii), (iii), (ix) तथा (x) से चूहा बाहर नहीं निकल पा रहा है अतः ये बंद आकृतियाँ हैं। वे आकृतियाँ जो अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त होती है, बंद आकृतियाँ कहलाती हैं एवं वे जो अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त नहीं होती हैं, खुली आकृतियाँ कहलाती हैं।

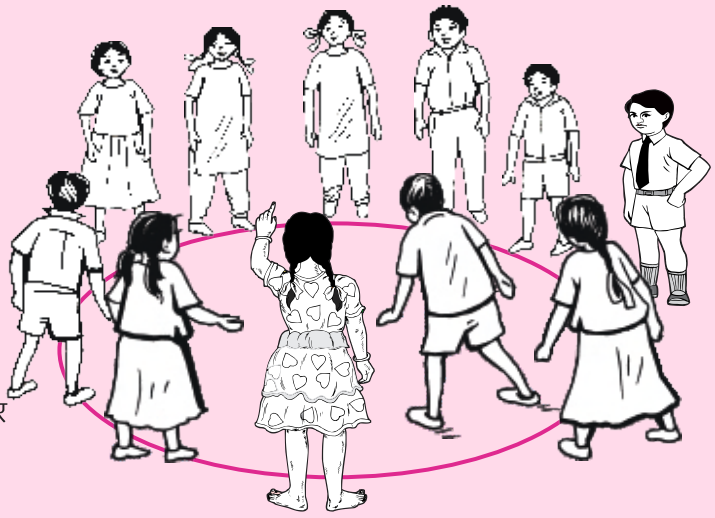


आकृति 9.5

नीर और तीर का खेल

नियम :

1. फर्श पर चॉक से एक गोल घेरा बनाइए।
2. नीर कहने पर घेरे के अन्दर कूदना है।
3. तीर कहने पर घेरे से बाहर कूदना है।
4. निर्देशों के अनुसार न करने पर खिलाड़ी आउट हो जाता है।



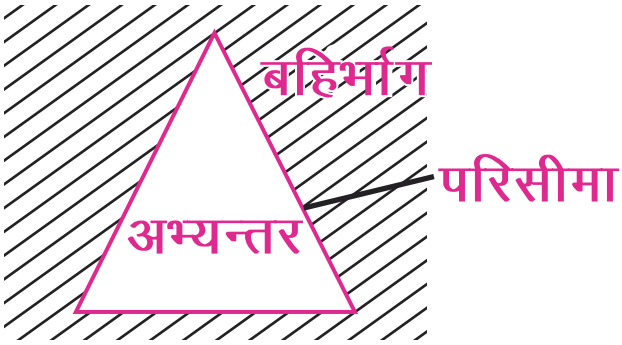
आकृति 9.6

उपर्युक्त आकृति में घेरे के अन्दर खड़े बच्चे घेरे के अभ्यन्तर भाग में, घेरे के बाहर खड़े बच्चे घेरे के बहिर्भाग में हैं व घेरे पर खड़े बच्चे घेरे की परिसीमा पर खड़े कहलाते हैं।

www.rajteachers.com

एक बंद आकृति से सम्बन्धित तीन भाग होते हैं–

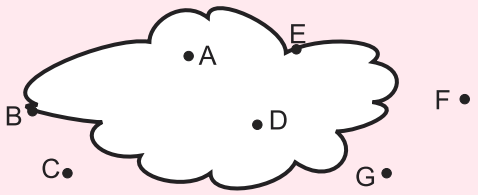
1. अभ्यन्तर (अन्दर का भाग)
2. बहिर्भाग (बाहरी भाग)
3. परिसीमा



आकृति 9.7

करो और सीखो

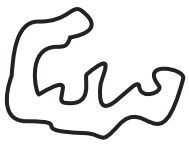
1. तीन बन्द एवं तीन खुली आकृतियों के चित्र बनाइए।
2. दिए गए चित्र में कौन–कौन से बिन्दु बन्द आकृति के अभ्यन्तर, बहिर्भाग एवं परिसीमा पर स्थित है।

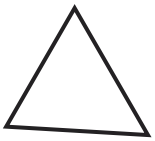


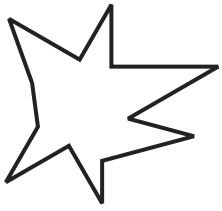
प्रश्नावली 9.1

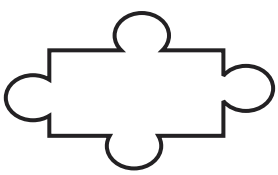
1. नीचे दी गई आकृतियों में खुली व बंद आकृतियाँ छाँटिए।

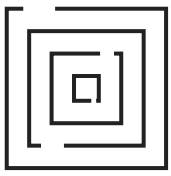

(i)


(ii)


(iii)


(iv)

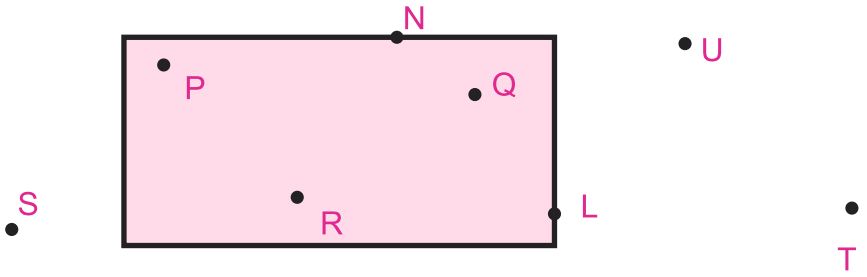

(v)


(vi)

2. अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों A से Z के मध्य की बंद आकृतियाँ बताइए।

www.rajteachers.com

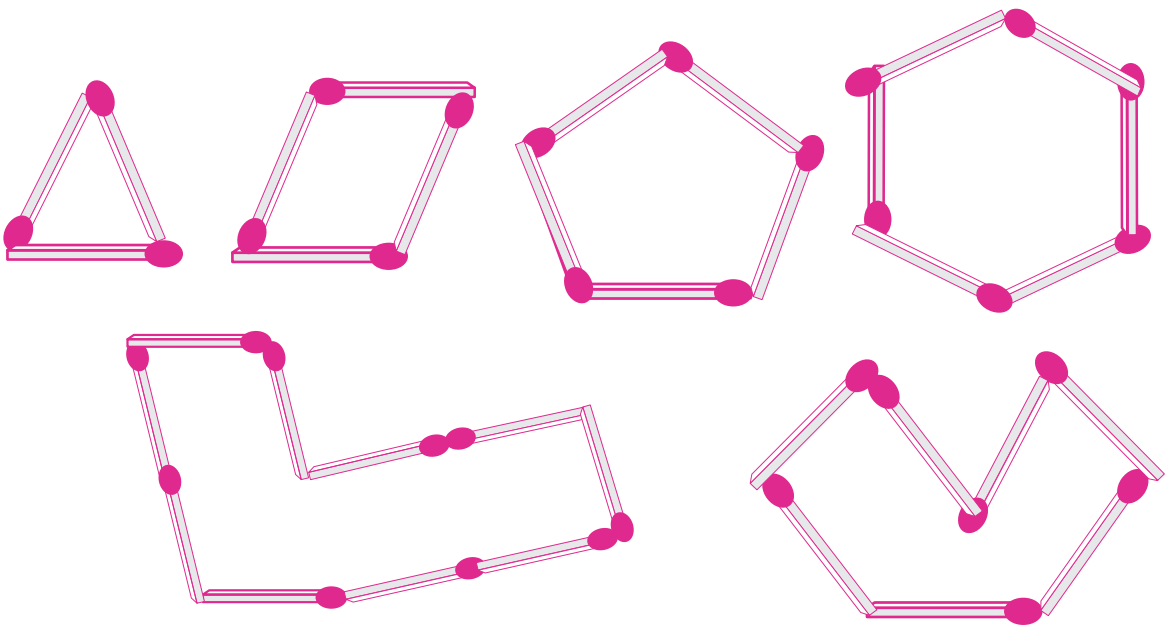
3. (i) आयत के अभ्यन्तर भाग में बने बिन्दु बताइए।
   (ii) ऐसे बिन्दु लिखिए जो आयत के बहिर्भाग में हैं।
   (iii) क्या N तथा L आयत की परिसीमा पर है?



4. निम्न आकृतियाँ संभव हो तो बनाइए।
   (i) एक बंद आकृति जो बहुभुज नहीं है।
   (ii) केवल रेखाखण्डों से बनी हुई खुली आकृति।
   (iii) दो भुजाओं वाला एक बहुभुज।
   (iv) चार भुजाओं वाला एक बहुभुज।
5. पाँच बिदुओं A, B, C, D, E को एक बहुभुज में इस प्रकार जमाइए कि –
   (i) बिन्दु A व C अभ्यन्तर में हो।
   (ii) बिन्दु B व D बहिर्भाग में हो।
   (iii) बिन्दु E परिसीमा पर हो।

9.3 बहुभुज

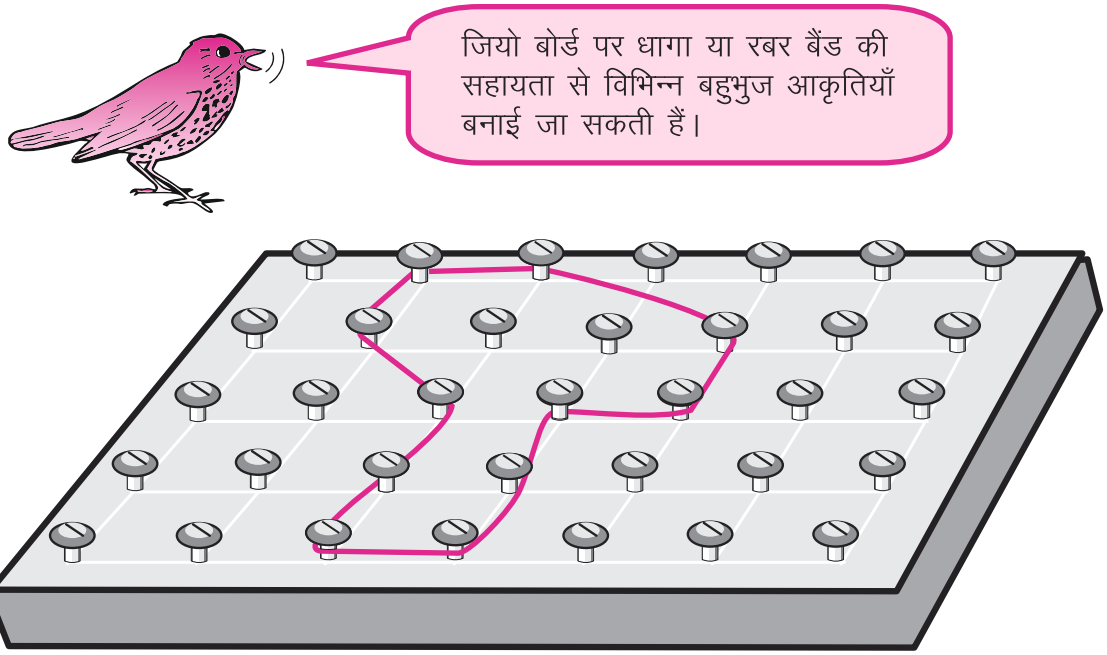
माचिस की तीलियों को कार्डशीट पर चिपकाकर कुछ आकृतियाँ निम्न प्रकार बनाइए।



www.rajteachers.com



इस प्रकार की बंद आकृतियाँ जो तीन या तीन से अधिक भुजाओं द्वारा निर्मित हो उन्हें बहुभुज कहते हैं। बहुभुज जियो बोर्ड पर भी बनाए जा सकते हैं।

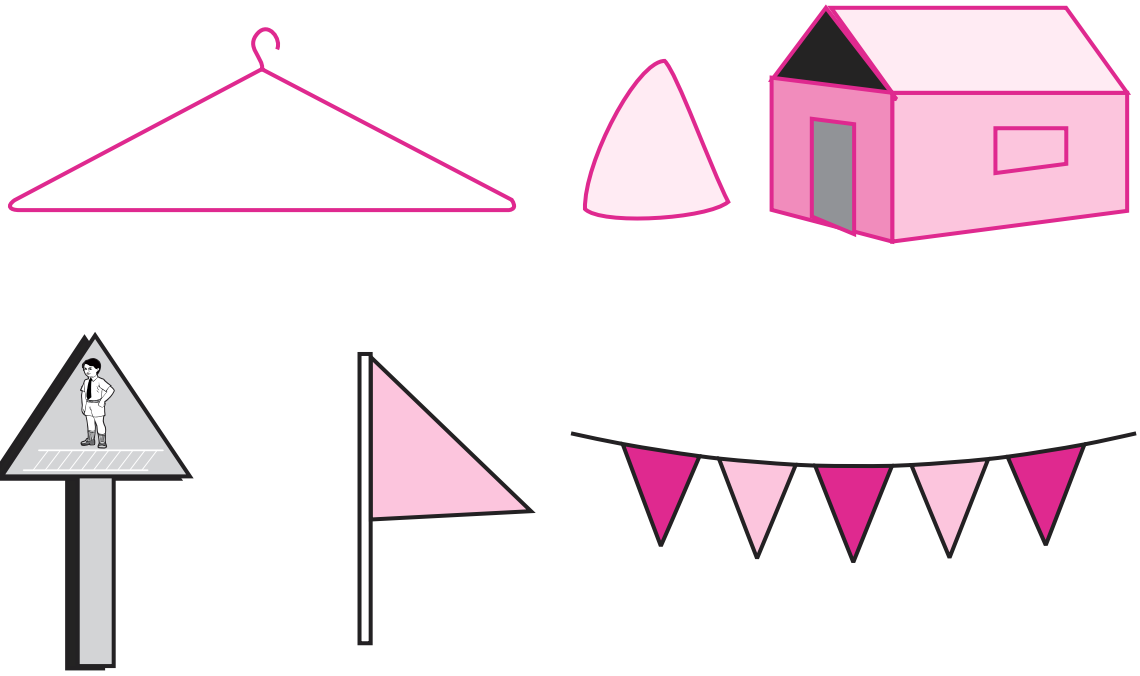


(जियो बोर्ड लकड़ी के तख्ते पर बराबर दूरी पर कीलें गाड़ कर बनाया जाता है) जियो बोर्ड पर बने बहुभुज को देखो इसमें कितनी भुजाएँ है? आप ऐसे और अलग–अलग भुजाओं के बहुभुज बनाइए।

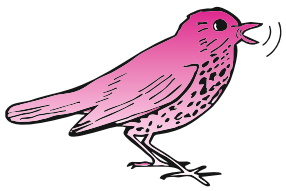
9.4 त्रिभुज

हमने माचिस की तीलियों से विभिन्न प्रकार के बहुभुजों का निर्माण किया था उनमें तीन तीलियों से जो बहुभुज बना था। इसे ध्यान से देखिए इसे त्रिभुज कहते हैं। नीचे दिए गए चित्रों में आपको त्रिभुज कहाँ–कहाँ दिखाई देता है?

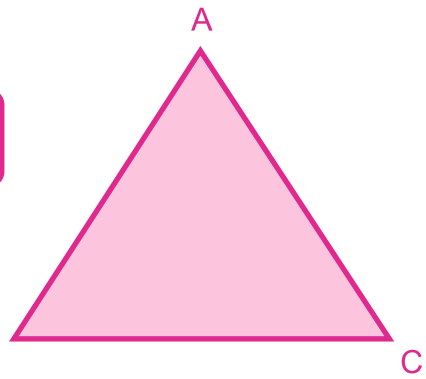
www.rajteachers.com



ऐसी आकृतियाँ जिनमें तीन भुजाएँ होती है एवं तीन कोण (तीन कोने) होते हैं, उन्हें त्रिभुज कहते हैं।

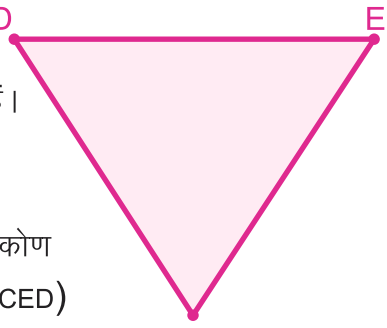


त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।



9.4.1 त्रिभुज के अवयव

राधा जब विद्यालय, दुकान एवं चौराहे से होकर निकली एवं वापस विद्यालय पहुँची तो इस प्रकार की आकृति प्राप्त हुई।



इस त्रिभुजाकार आकृति में बिन्दु C, D, E त्रिभुज के शीर्ष हैं। C से D की दूरी भुजा CD, D से E की दूरी भुजा DE व E से C की दूरी भुजा EC कहलाती है। एवं शीर्ष C पर बनने वाला कोण $\angle C$ ($\angle DCE$) शीर्ष D पर बनने वाला कोण $\angle D$ ($\angle CDE$) एवं शीर्ष E पर बनने वाला कोण $\angle E$ ($\angle CED$) कहलाता है।

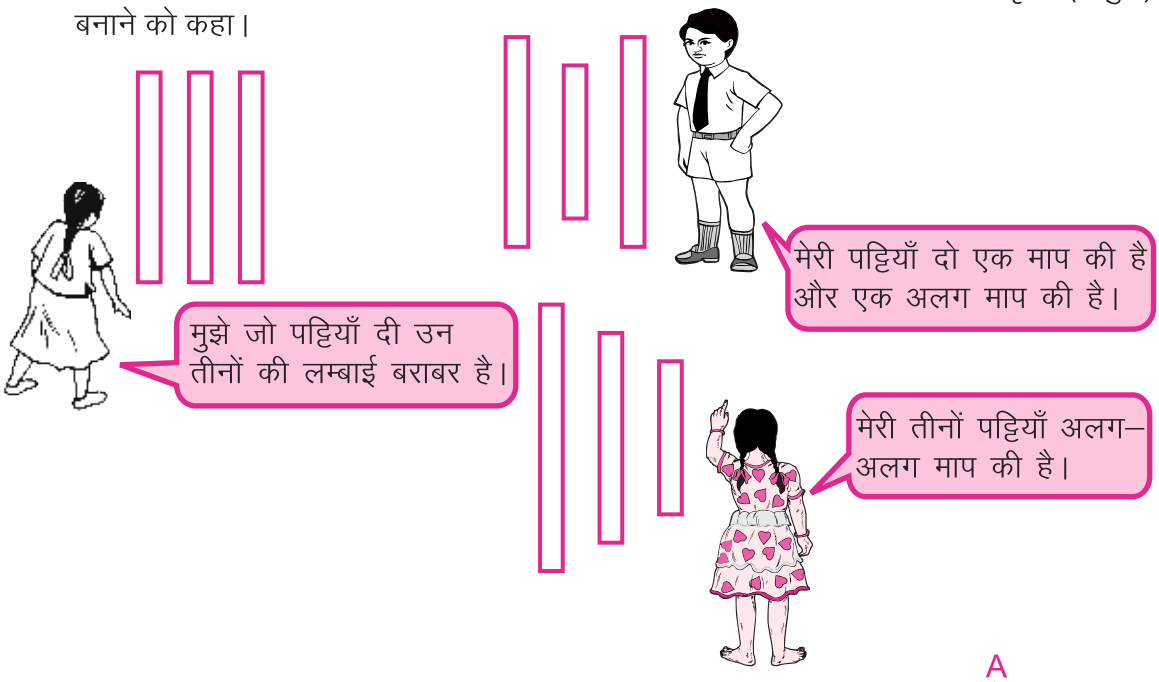
www.rajteachers.com

हम जानते हैं कि शीर्ष D पर बनने वाले कोण को हम ∠CDE या ∠EDC दोनों ही तरह से दर्शा सकते हैं।

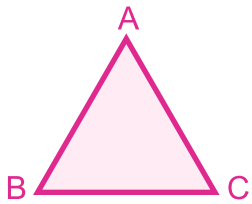
9.5 त्रिभुजों के प्रकार

9.5.1 भुजाओं के आधार पर

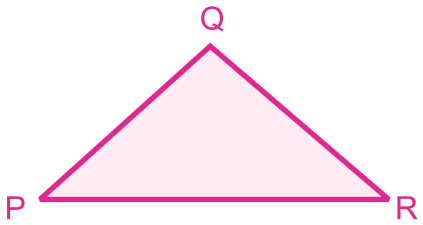
शिक्षक ने तीनों बच्चों को विभिन्न मापों की तीन–तीन बाँस की पट्टियाँ दी और बन्द आकृति (त्रिभुज) बनाने को कहा।



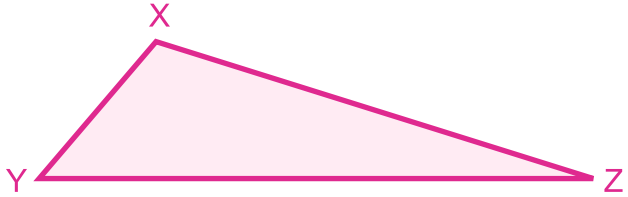
जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर हो उसे **समबाहु त्रिभुज** कहते हैं।
आकृति में AB = BC = CA



जिस त्रिभुज की दो भुजाएँ समान हो व एक भुजा अलग हो उसे **समद्विबाहु त्रिभुज** कहते हैं इस त्रिभुज में PQ = QR ≠ PR



जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ असमान हो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। इस आकृति में
XY ≠ YZ ≠ ZX



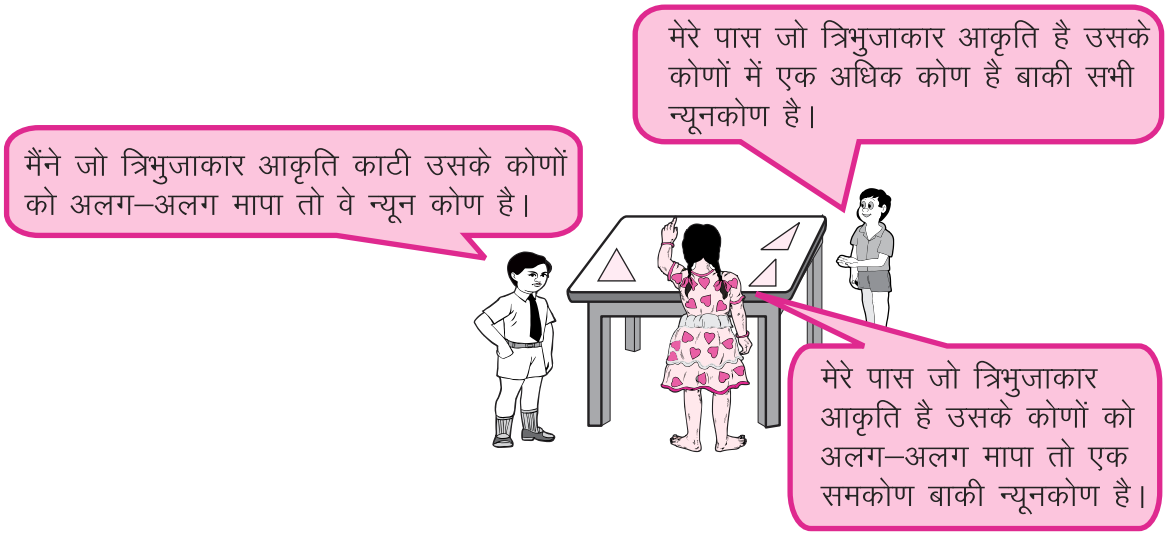
www.rajteachers.com

करो और सीखो

एक कार्ड शीट पर केवल माचिस की तीलियों को चिपका कर समबाहु, समद्विबाहु व विषमबाहु त्रिभुज बनाइए।

9.5.2 कोणों के आधार पर

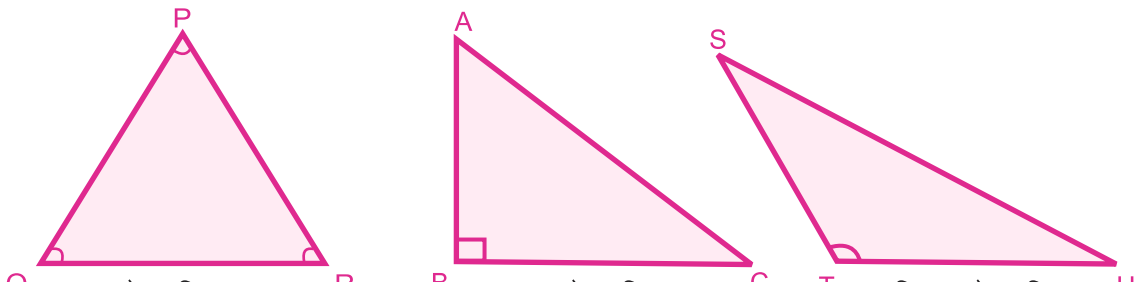
कक्षा में विद्यार्थियों ने आज कागज से अलग–अलग प्रकार की त्रिभुजाकार आकृतियाँ बनाई।



(i) वह त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यूनकोण हो वह **न्यूनकोण त्रिभुज** कहलाता है।

(ii) वह त्रिभुज जिसमें एक कोण समकोण हो वह **समकोण त्रिभुज** कहलाता है।

(iii) वह त्रिभुज जिसमें एक कोण अधिक कोण हो वह **अधिक कोण त्रिभुज** कहलाता है।



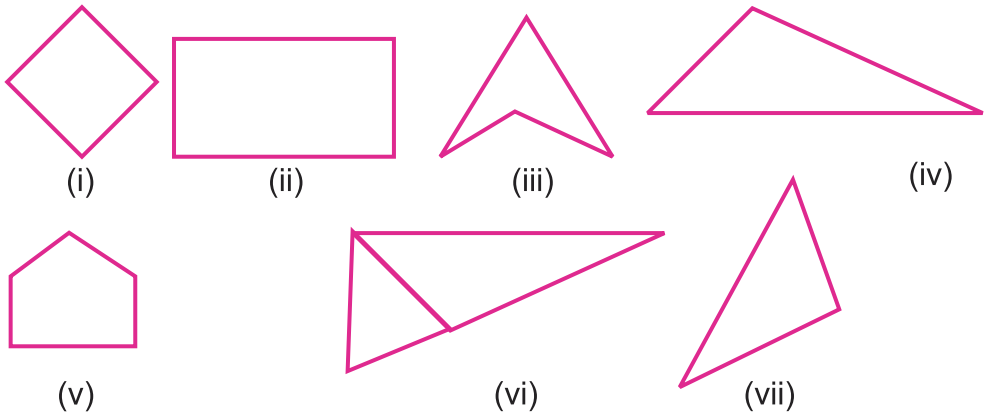
करो और सीखो

1. किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान है तो क्या सभी कोण न्यूनकोण होंगे?
2. विषमबाहु त्रिभुज का चित्र बनाकर उसके कोणों का माप लिखिए?
3. क्या ऐसा त्रिभुज बनाया जा सकता है जिसमें दो समकोण हो? यदि हाँ तो बनाइए। यदि नहीं तो कारण बताएँ।

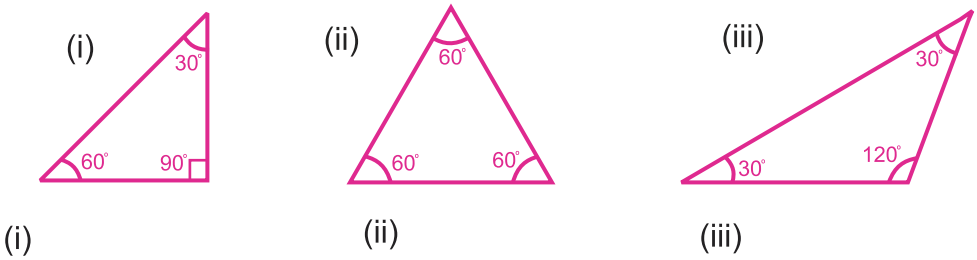
www.rajteachers.com

प्रश्नावली 9.2

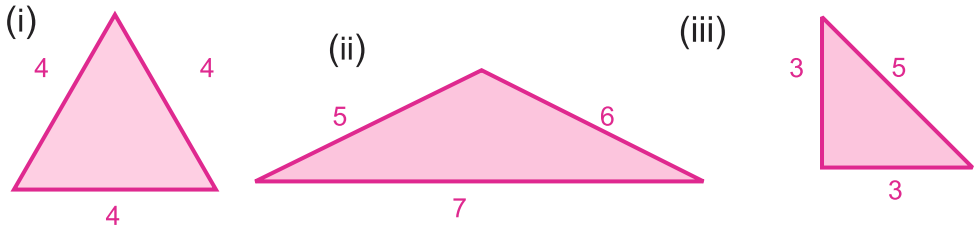
1. नीचे दी गई आकृतियों में से त्रिभुज छाँटिए।



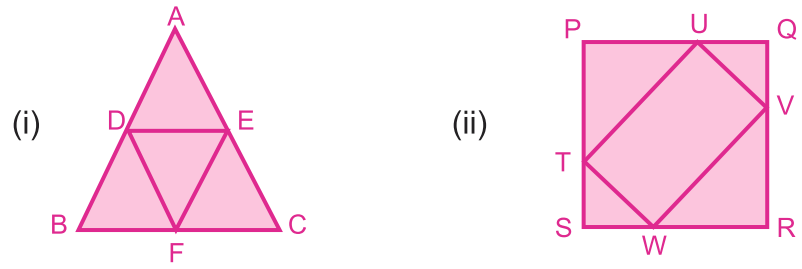
2. निम्न आकृतियों में त्रिभुजों के नाम कोणों के आधार पर लिखिए।



3. भुजाओं के आधार पर निम्न त्रिभुजों के प्रकार लिखिए।



4. निम्नांकित आकृतियों में बने सभी त्रिभुजों के नाम लिखिए।



5. दिए गए कोणों के आधार पर त्रिभुजों के प्रकार लिखिए।

(i) $105^0, 46^0, 29^0$ (ii) $60^0, 60^0, 60^0$ (iii) $57^0, 33^0, 90^0$

www.rajteachers.com

6. दी गई भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों के प्रकार लिखिए।

(i) 3.5 सेमी, 3 सेमी, 1.8 सेमी (ii) 2.8 सेमी, 2 सेमी, 2 सेमी (iii) 5.2 सेमी, 5.2 सेमी, 5.2 सेमी

7. कोष्ठक में सही व गलत लिखिए।

(i) किसी त्रिभुज में तीन कोण, तीन भुजा व तीन शीर्ष होते हैं । ( )

(ii) किसी त्रिभुज के तीनों कोण समकोण से कम हैं तो वह समकोण त्रिभुज कहलाता है। ( )

(iii) किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ असमान हैं तो वह समबाहु त्रिभुज कहलाता है। ( )

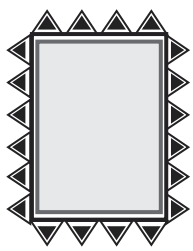
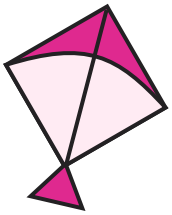
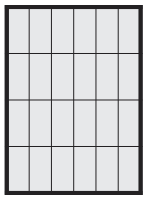
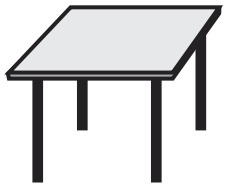
(iv) किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ समान हैं तो वह समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है। ( )

(v) किसी त्रिभुज में दो कोण न्यून कोण व एक कोण अधिक कोण है तो वह अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है। ( )

9.6 चतुर्भुज

आपने अपनी कक्षा में श्यामपट्ट देखा है उस श्याम पट्ट के कितने किनारे (भुजाएँ) हैं? ऐसी चार किनारों (भुजाओं) वाली और कौनसी आकृतियाँ आपने देखी है ? इस प्रकार टेबल, सौ रूपये के नोट, बिस्किट के पैकेट की सतह आदि चार भुजाओं से बनी होती हैं। ऐसी सभी बहुभुज आकृतियाँ जिनमें चार भुजाएँ होती है, चतुर्भुज कहलाते हैं।

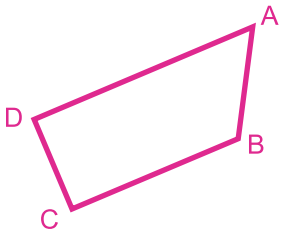
नीचे बने चित्रों में आपको कहाँ–कहाँ चतुर्भुज दिखाई दे रहे हैं?

इसका मतलब मेरे गाँव में ऐसी चार भुजाओं वाले खेत भी चतुर्भुज आकृति के हैं।



9.6.1 चतुर्भुज के अवयव : दिए गए चतुर्भुज के चित्र को देखकर बताइए इसमें



1. कितनी भुजाएँ हैं? .....
2. कितने शीर्ष हैं? .....
3. कितने कोण हैं? .....

हम देखते हैं कि चतुर्भुज में क्रमशः AB, BC, CD, DA चार भुजाएँ हैं तथा इसके शीर्ष A, B, C व D हैं। चार कोण हैं जिनके नाम क्रमशः ∠A, ∠B, ∠C तथा ∠D हैं। AB के सामने भुजा DC एवं BC के सामने की भुजा AD है। ये भुजाएँ सम्मुख भुजाएँ कहलाती है। इसी प्रकार AB की आसन्न भुजाएँ (AB से जुडी हुई) AD व BC है इसी प्रकार चारों भुजाओं की आसन्न भुजाएँ लिखी जा सकती है। कोण ∠A का सम्मुख कोण ∠C व ∠B का सम्मुख कोण ∠D है एवं ∠A का आसन्न कोण (समीप कोण) ∠B व ∠D है इसी प्रकार सभी शीर्षों के आसन्न कोणों का पता कीजिए।

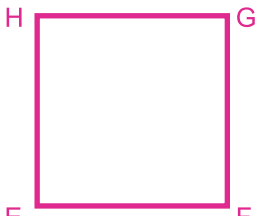
सलमा और प्रीतम ने चतुर्भुजों की भुजाओं को समान करके दो प्रकार के चतुर्भुज बनाए।

www.rajteachers.com





(i)

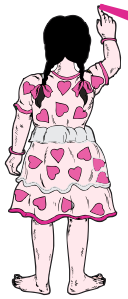


(ii)



जब मैंने इस आकृति में भुजाओं के कोणों को मापा तो आमने सामने की भुजाएँ बराबर व सभी कोण समान हैं।

इस आकृति में जब मैंने भुजाओं व कोणों को मापा तो भुजाएँ भी एक माप की व कोण भी समान हैं।



हाँ ये दोनों भी चतुर्भुज हैं क्योंकि इनमें भी चार भुजाएँ व चार कोण हैं। लेकिन ये विशेष प्रकार के चतुर्भुज हैं।

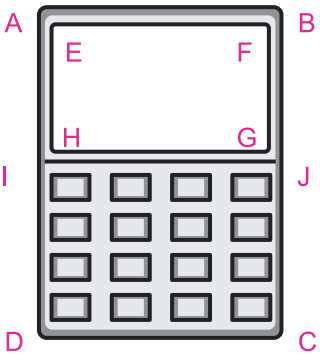
चूँकि आकृति (i) में भुजा PQ व भुजा SR एवं भुजा SP व भुजा RQ समान एवं ∠P, ∠Q, ∠R व ∠S समकोण हैं। ऐसा चतुर्भुज जिसमें आमने सामने की भुजाएँ बराबर हो व प्रत्येक कोण समकोण हो **आयत** कहलाता है।

आकृति (ii) में भुजा EF, भुजा FG, भुजा GH व भुजा HE सभी समान व ∠E, ∠F, ∠G व ∠H समकोण हैं। ऐसा चतुर्भुज जिसमें सभी भुजाएँ समान हो व प्रत्येक कोण समकोण हो, **वर्ग** कहलाता है।

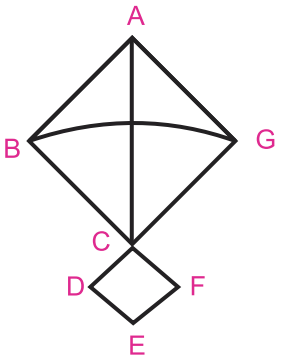
प्रश्नावली 9.3

1. निम्न चित्रों में बनने वाले चतुर्भुजों के नाम लिखिए।

(i)

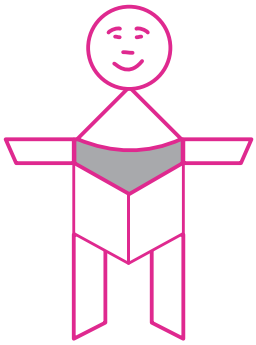


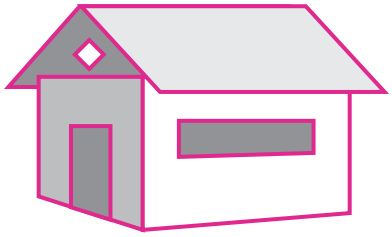
(ii)



www.rajteachers.com

2. निम्न आकृतियों में बनने वाले कुल चतुर्भुजों की संख्या लिखिए।

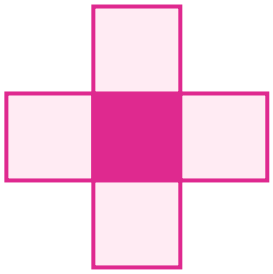
(i) 

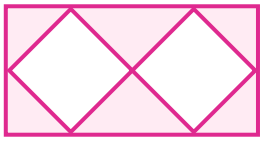
(ii) 

3. चतुर्भुज KLMN बनाइए और बताइए।

(i) सम्मुख भुजाओं के दो युग्म
(ii) आसन्न भुजाओं के दो युग्म
(iii) आसन्न कोणों के दो युग्म
(iv) सम्मुख कोणों के दो युग्म

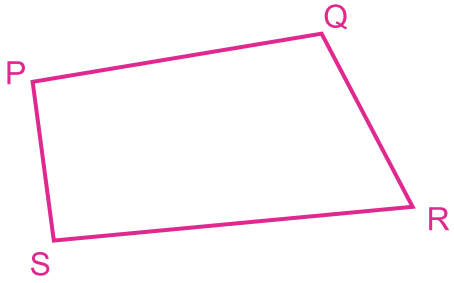
4. निम्नांकित आकृतियों में आयत एवं वर्गों की संख्या लिखिए ।

(i) 

(ii) 

5. दिए गए चतुर्भुज में बताइए।

(i) ∠P का सम्मुख कोण
(ii) ∠R के आसन्न कोण
(iii) भुजा QR की सम्मुख भुजा
(iv) भुजा PS की आसन्न भुजाएँ
(v) चारों कोणों के नाम



6. कोष्ठक में सही गलत लिखिए।

(i) वह चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा समान हो उसे आयत कहते हैं। ( )
(ii) एक वर्ग में प्रत्येक कोण समकोण होता है। ( )
(iii) आयत में आमने सामने की भुजाएँ समान नहीं होती है। ( )
(iv) वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाएँ समान हो आयत कहते हैं। ( )

www.rajteachers.com

हमने सीखा

1. बंद आकृतियों का क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात किया जा सकता है।

2. बंद आकृति के अन्दर के भाग को अभ्यन्तर, किनारे पर स्थित भाग को परिसीमा तथा बाह्य भाग को बहिर्भाग कहते हैं।

3. तीन अथवा तीन से अधिक भुजाओं से घिरी आकृति को बहुभुज कहते हैं। तीन भुजाओं वाला बहुभुज त्रिभुज, चार भुजाओं वाला बहुभुज चतुर्भुज व इसी तरह अन्य बहुभुजों का नामकरण किया जाता है।

4. भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण क्रमशः विषमबाहु, समद्विबाहु व समबाहु है।

5. कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण न्यूनकोण, समकोण एवं अधिक कोण त्रिभुज है।

6. जिस चतुर्भुज के आमने सामने की भुजाएँ बराबर हो व प्रत्येक कोण समकोण हो वह आयत कहलाता है।

7. जिस चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर एवं प्रत्येक कोण समकोण हो वर्ग कहलाता है।

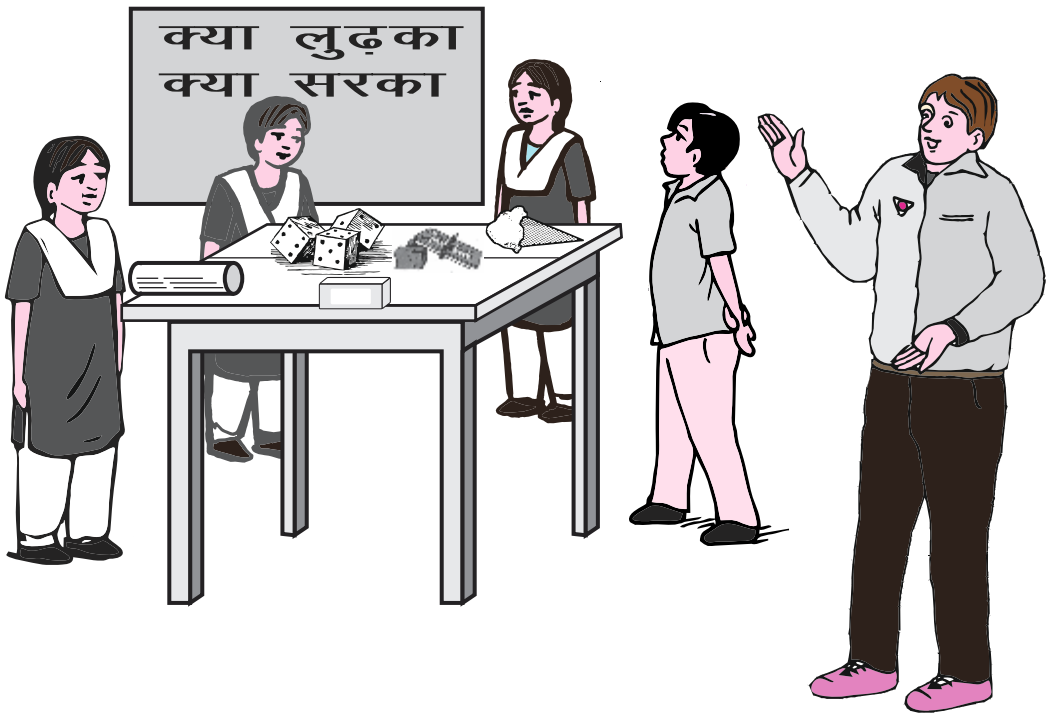
www.rajteachers.com

अध्याय 10

त्रिविमीय आकारों की समझ

10.1 नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए।

कक्षा में बच्चे टेबल पर ज्यामिति बॉक्स की फिसल पट्टी बनाकर खेल रहे हैं। वह ज्यामिति बॉक्स पर माचिस, पासा, कंचे, गेंद, लकड़ी का बेलनाकार टुकड़ा, रबर, जोकर की टोपी आदि लुढ़काकर/खिसकाकर देख रहे हैं।



विभिन्न वस्तुओं के साथ यह खेल आप भी खेल कर देखिए कौन–कौनसी वस्तुएँ लुढ़कती है ?

शंकर – कंचे, गेंद जैसी गोल वस्तुएँ लुढ़कती हैं।

वर्षा – हाँ! परन्तु माचिस, पासा, रबर आदि तो सरकते हैं।

ताहिर – जोकर की टोपी तो सरकती भी है और लुढ़कती भी है।

शिक्षक – बिल्कुल ठीक! ठोसों की ऐसी सतहें जिससे वह सरकती है वे सपाट सतह कहलाती है तथा जिससे लुढ़कती है वह सतह वक्र सतह कहलाती है। जैसे गेंद पूरी तरह वक्राकार है जबकि लकड़ी का बेलनाकार टुकड़ा ऊपर तथा नीचे से सपाट सतह वाला है तथा मध्य सतह से वक्राकार है।

www.rajteachers.com

करो और सीखो

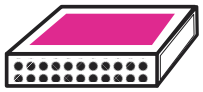
अपने चारों ओर की कम से कम 20 वस्तुओं की सूची बनाएँ एवं उनकी सतह का अवलोकन करें। उन्हें निम्नलिखित सारणी के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।

केवल वक्र सतह वाली वस्तुएँ	केवल सपाट सतह वाली वस्तुएँ	दोनों प्रकार की सतह वाली वस्तुएँ
नारंगी	बॉक्स	सेल

10.2 त्रिविमीय आकार अध्याय 8 में हमने वृत्त, वर्ग, त्रिभुज, आयत आदि आकृतियों के बारे में पढ़ा है। इन सभी में केवल लम्बाई एवं चौड़ाई ही होती है। इन्हें द्विविमीय (2 D) आकृतियाँ कहते हैं। इसी अध्याय में हमने रेखा के बारे में पढ़ा है। इसकी केवल लम्बाई होती है। अतः रेखा एक विमा वाली आकृति है। ऊपर दिए गए ठोस तथा अन्य सभी ठोसों में लम्बाई तथा चौड़ाई के साथ–साथ ऊँचाई अथवा गहराई भी होती है। अतः इन्हें त्रिविमीय (3 D) आकृतियाँ कहते हैं।

10.2.1 घनाभ

केवल सपाट सतह वाले ठोस आकारों जैसे संदूक, टूथपेस्ट का डिब्बा, ईंट, चाय पत्ती का पैकेट, तेल का पीपा (टिन) आदि घनाभ के उदाहरण हैं। ऐसा ही एक घनाभ माचिस की बंद डिब्बी है। इसकी प्रत्येक सतह को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



घनाभ में कितनी सतहें हैं ? ……

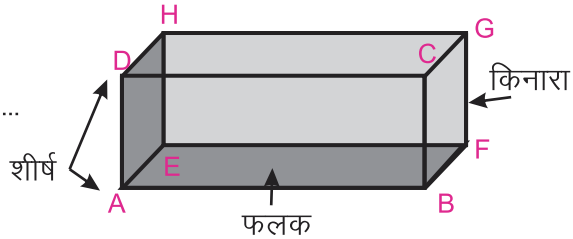
प्रत्येक सतह का आकार कैसा है ? ……

जहाँ दो सतहें मिलती है उन्हें किनारा कहते हैं।

बताइए माचिस में कितने किनारे हैं ? ……

तीन किनारे एक शीर्ष पर आकर मिलते हैं।

बताइए घनाभ में कितने शीर्ष होते हैं ? ……



घनाभ का प्रत्येक सपाट पृष्ठ आयताकार होता है। यह पृष्ठ इसका फलक कहलाता है। घनाभ के 6 फलक होते हैं। इसके दो फलक एक रेखाखण्ड से मिलते हैं जो घनाभ का एक किनारा कहलाता है। घनाभ में 12 किनारे तथा 8 शीर्ष होते हैं।

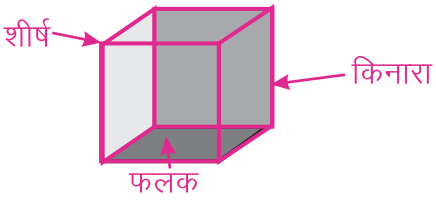
www.rajteachers.com

उपर्युक्त चित्र में घनाभ के 6 आयताकार फलक क्रमशः A B C D, E F G H, B F G C, A E H D, A B F E तथा C G H D है। इसी प्रकार 12 किनारे (कोर) क्रमशः AB, CD, EF, GH, BC, FG, AD, EH, BF, CG, AE तथा DH है। घनाभ के 8 शीर्ष (कोने) क्रमशः A, B, C, D, E, F, G, तथा H है।

10.2.2 घन

चॉक का डिब्बा, पासा आदि घनाभों के सभी फलक वर्गाकार होते हैं, अर्थात इनकी लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई पूर्णतः समान होती है। ऐसी आकृतियाँ घन कहलाती हैं।

घनाभ के समान घन के भी 6 फलक, 8 शीर्ष तथा 12 किनारे होते हैं।





10.2.3 बेलन

लकड़ी का गट्टा जैसी आकृतियाँ जिनकी दो सतहें वृत्ताकार व एक सतह वक्राकार हो बेलन कहलाती हैं।

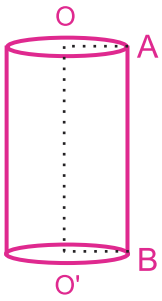
आपने लोहे का पानी का पाईप, अनाज रखने का ड्रम आदि को देखा है। यह भी बेलन के उदाहरण हैं।





करो और सीखो

क्या आप रसोईघर के बेलन को भी बेलन कहेंगे। तर्क द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

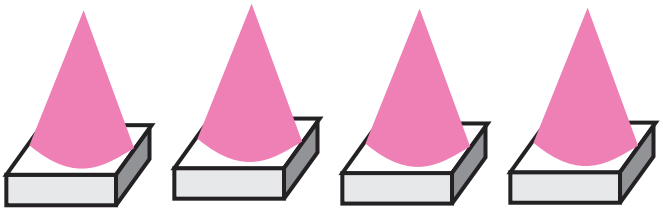


दिए गए बेलन के चित्र में दो पृष्ठ वृत्ताकार है तथा मध्य का पृष्ठ वक्राकार है। और OA व $O'B$ वृत्ताकार पृष्ठों की त्रिज्या एवं OO' बेलन की ऊँचाई है।

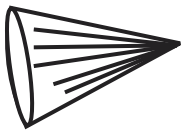
www.rajteachers.com

10.2.4 शंकु

हमने सड़क पर मरम्मत कार्य करते समय निम्न आकृतियों को रखा हुआ देखा है।



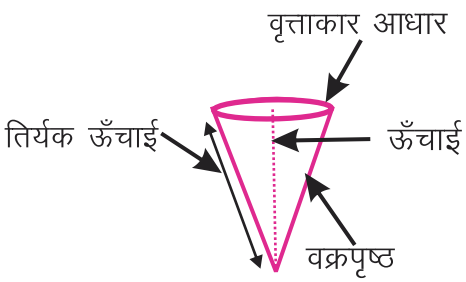
इनके अलावा जोकर की टोपी, आइसक्रीम कोन जैसी आकृतियों में एक वक्रपृष्ठ तथा एक वृत्ताकार पृष्ठ होता है।







अतः ऐसी आकृतियाँ जिसका एक सिरा वृत्ताकार तथा एक वक्राकार पृष्ठ हो शंकु कहलाती हैं।

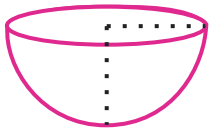


10.2.5 गोला

गेंद, कंचे, फुटबॉल सभी की आकृतियाँ समान होती हैं। इनकी सम्पूर्ण सतह वक्राकार होती हैं। ये सभी आकृतियाँ गोलाकार हैं। क्या आप सिक्के को गोला कह सकते हैं ? क्या यह अपनी सभी सतहों पर लुढ़कते है ? क्या चूड़ी में भी यह संभव है ?

आपने अपने दैनिक जीवन में नींबू अवश्य देखा होगा। इसे बीच में से काटने पर यह अर्द्धगोला दिखाई देता है।

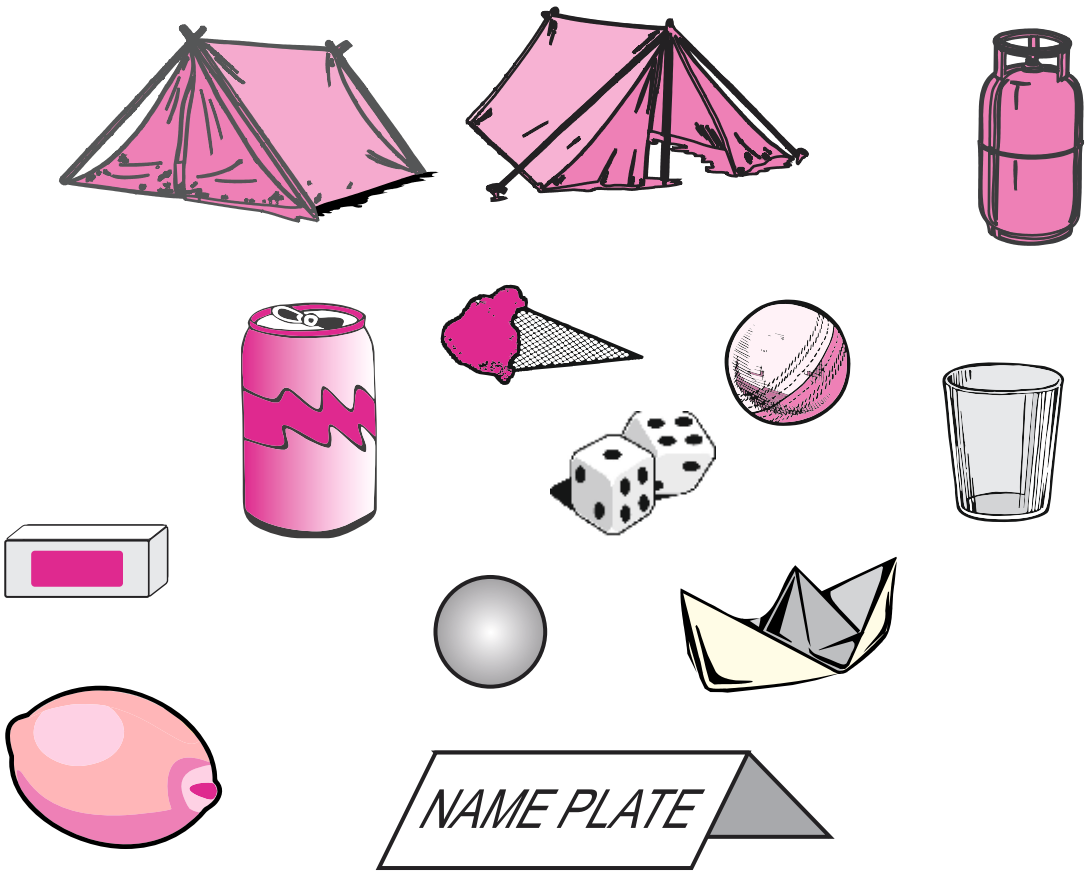




सोचिए और चर्चा कीजिए : वृत्त, गोला तथा बेलन में क्या–क्या अन्तर है ?

www.rajteachers.com

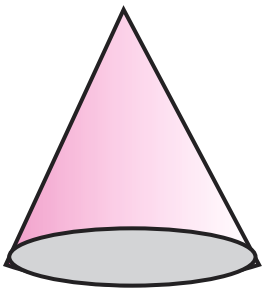
10.2.6 बहुफलक नीचे दिए चित्रों को ध्यान से देखिए, इनमें कौन–कौन से चित्र की सतह सपाट है?



ऐसी आकृतियाँ जिनकी सभी सतहें सपाट होती हैं तथा प्रत्येक सतह एक बहुभुज (त्रिभुज, चतुर्भुज ...) होती है बहुफलक कहलाती हैं।

प्रश्नावली 10

1. निम्नांकित चित्रों को पहचानिए तथा प्रत्येक आकृति का नाम लिखिए।

(i) 

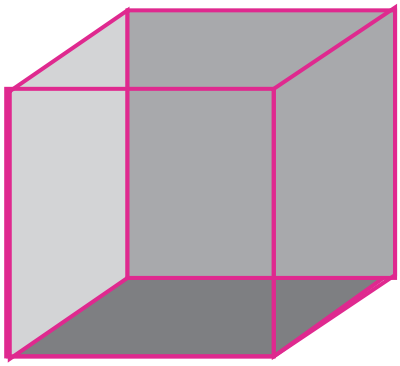
(ii) 

www.rajteachers.com

(iii)



(iv)



(v)



2. सोचकर लिखिए।

(i) किन्हीं दो गोलाकार फलों के नाम।

(ii) ताजा मूली से बनने वाली दो ठोस आकृतियों के नाम।

(iii) रसोई घर में उपयोग की जाने वाली दो बेलनाकार आकृतियों के नाम लिखिए।

(iv) आपके स्कूल बेग में उपलब्ध दो घनाभाकार वस्तुओं के नाम।

3. सही / गलत लिखिए।

(i) घनाभ तथा घन दोनों के छः फलक होते हैं। ( )

(ii) घनाभ के सभी किनारे समान होते हैं। ( )

(iii) एक बेलनाकार डिब्बे का ढ़क्कन हटा दिया जाए तो एक वृत्ताकार तथा एक वक्राकार पृष्ठ शेष रहते हैं। ( )

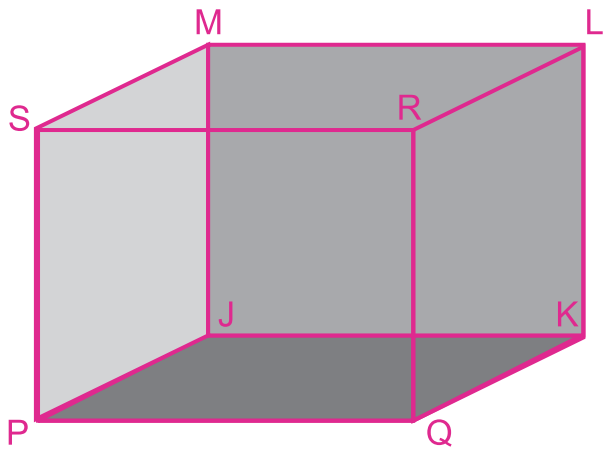
www.rajteachers.com

(iv) शंकु के दोनों सिरे वृत्ताकार होते हैं।

(v) घनाभ के किनारों को काटकर घन बनाया जा सकता है।

(vi) चूड़ी का आकार गोल होता है।

4. चित्रानुसार घनाभ के शीर्षों, किनारों तथा फलकों के नाम लिखिए।



हमने सीखा

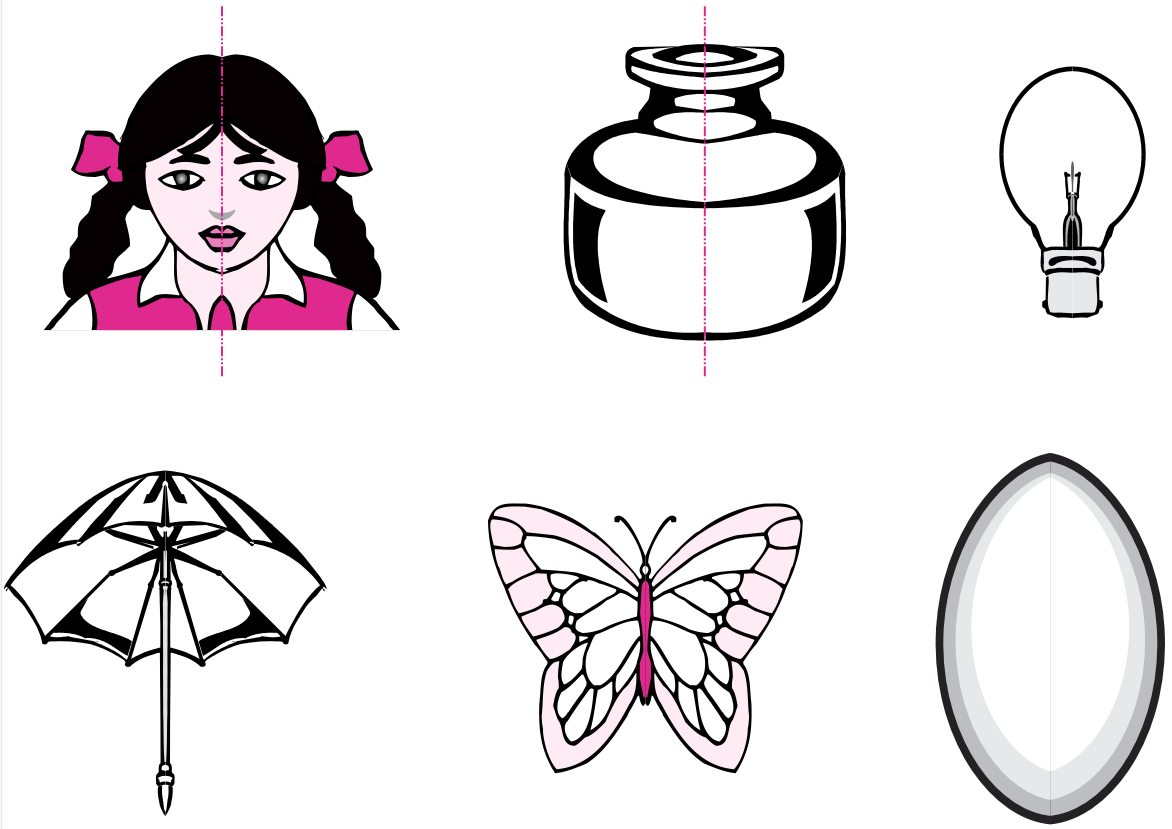
1. ठोसों की ऐसी सतहें जिनसे वह सरकती है वे सपाट सतह तथा जिनसे लुढ़कती है वह वक्र सतह कहलाती है।
2. ऐसे ठोस जिनमें लम्बाई तथा चौड़ाई के साथ–साथ ऊँचाई अथवा गहराई भी होती है इन्हें त्रिविमीय (3D) आकृतियाँ कहते हैं।
3. घनाभ का प्रत्येक सपाट पृष्ठ आयताकार होता है, घनाभ में 6 फलक, 8 शीर्ष व 12 किनारे होते हैं।
4. घन का प्रत्येक फलक वर्गाकार होता है, घन में भी 6 फलक, 8 शीर्ष व 12 किनारे होते हैं।
5. ऐसी आकृतियाँ जिनकी दो सतहें वृत्ताकार व एक सतह वक्राकार हो बेलन कहते हैं।
6. ऐसी आकृतियाँ जिसका एक पृष्ठ वत्ताकार तथा एक वक्राकार पृष्ठ हो, शंकु कहलाती हैं।
7. ऐसी आकृतियाँ जिनकी सम्पूर्ण सतह वक्राकार होती है। जैसे गेंद, कंचे, फुटबॉल। ये सभी आकृतियाँ गोलाकार हैं।
8. ऐसी आकृतियाँ जिनकी सभी सतहें सपाट होती है तथा प्रत्येक सतह एक बहुभुज (त्रिभुज, चतुर्भुज) होती है, बहुफलक कहलाती हैं।

www.rajteachers.com

अध्याय 11

सममिति

11.1 नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए।



आकृति 11.1

निम्न प्रश्नों के उत्तर अपने साथियों से चर्चा करके दीजिए।

(i) दो चित्रों में बिंदु रेखा खींची गई है यह चित्र को कितने भागों में बाँटती है?

(ii) क्या ये भाग एक समान हैं?

(iii) क्या चित्र में ऐसी और रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

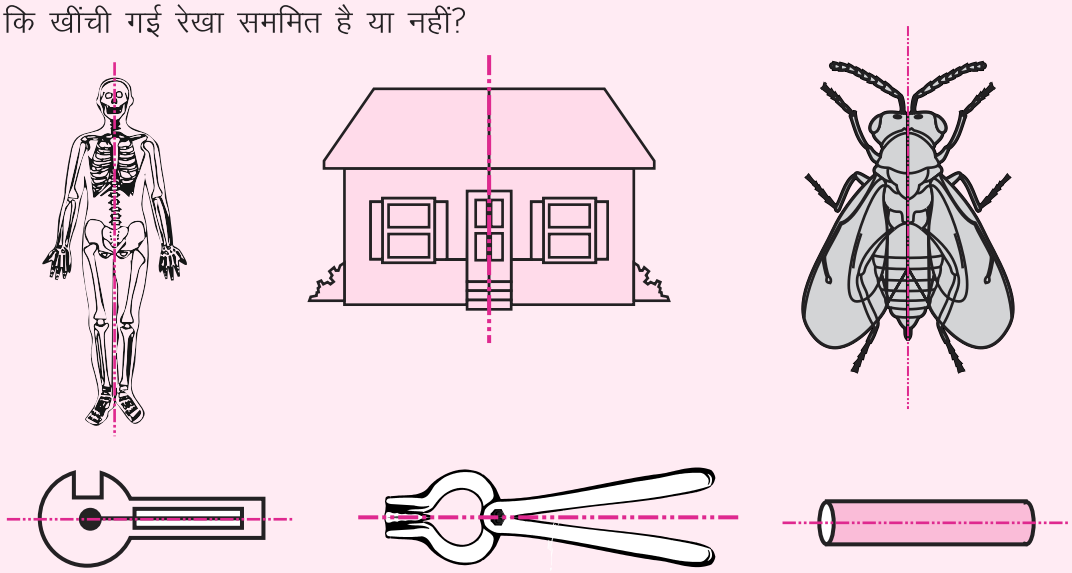
(iv) क्या सभी चित्रों में ऐसी रेखाएँ खींची जा सकती हैं? रेखाएँ खींचकर देखिए।

आप पाएँगे कि बिंदु रेखा चित्र को ठीक दो बराबर भागों में बाँटती है। ऐसी रेखाएँ सममित रेखाएँ कहलाती है तथा ऐसे चित्र सममित चित्र कहलाते हैं।

www.rajteachers.com

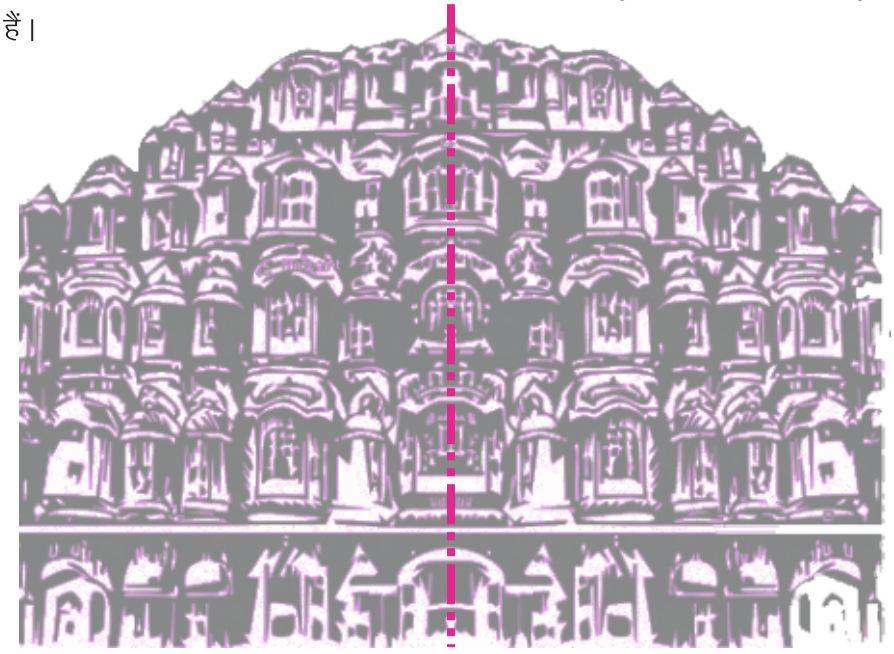
करो और सीखो

नीचे कुछ चित्र दिए गए हैं तथा उनमें एक रेखा खींची गई है। प्रत्येक के लिए बताइए कि खींची गई रेखा सममित है या नहीं?



आकृति 11.2

सममित रेखा चित्र को दो एक जैसे भागों में बाँटती है। यह खड़ी, आड़ी अथवा तिरछी भी हो सकती है। सममित रेखा से मोड़ने पर आकृति का एक भाग दूसरे भाग को पूर्णतः ढ़क लेता है। कई बार यह रेखा काल्पनिक तथा कई बार प्रत्यक्ष होती है। सामान्यतया सममित आकृतियाँ असममित आकृतियों से सुन्दर दिखाई देती हैं।

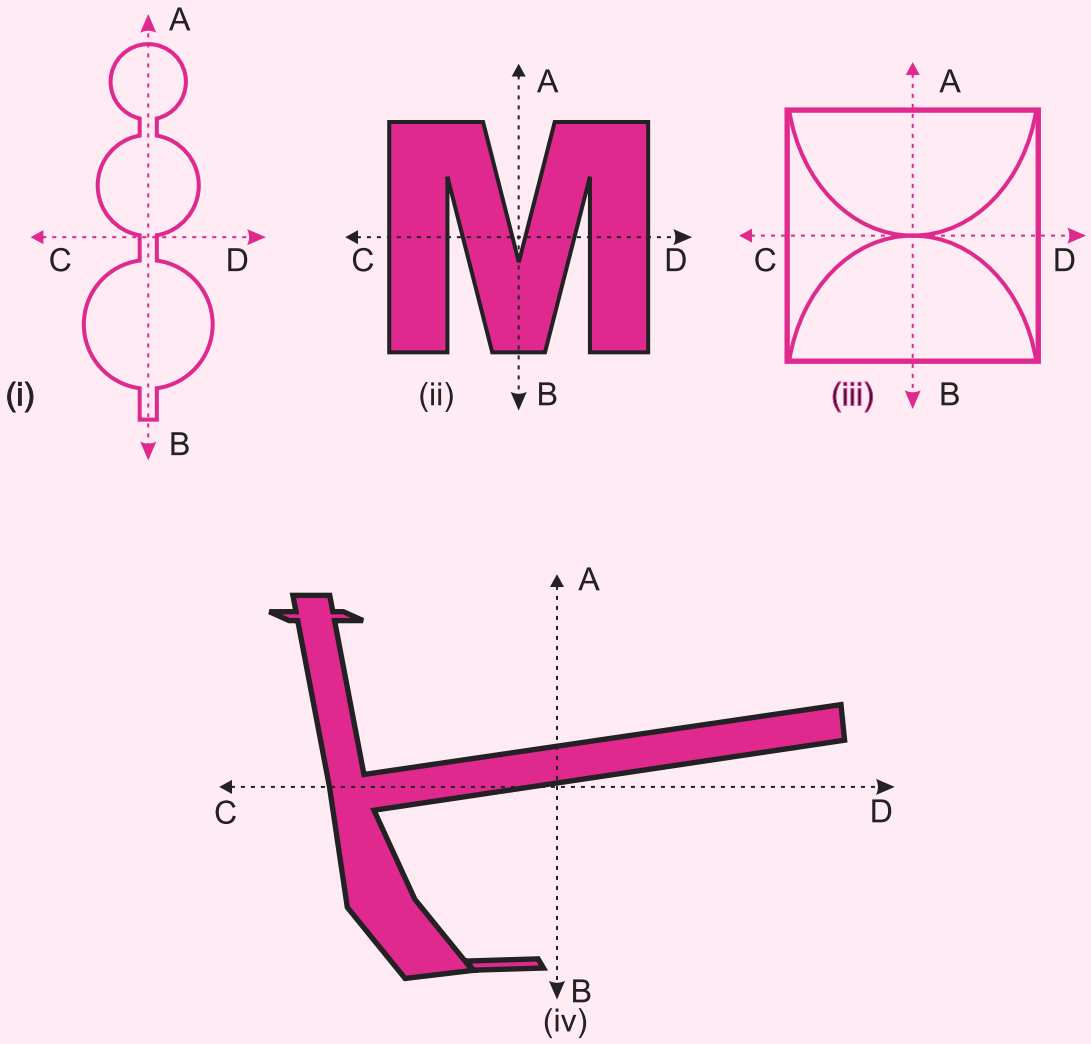


आकृति 11.3

www.rajteachers.com

विश्व प्रसिद्ध हवामहल भी कई कारणों के साथ–साथ सममिति की वजह से अत्यधिक सुन्दर दिखाई देता है।

करो और सीखो



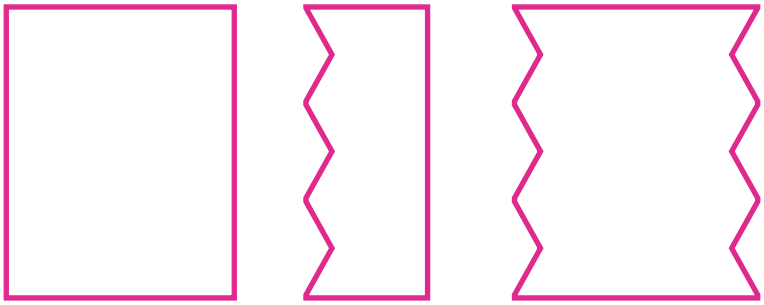
आकृति 11.4

(i) प्रत्येक चित्र में सममित रेखाएँ बताइए।
(ii) क्या कोई चित्र ऐसा है जिसमें दोनों रेखाएँ सममित रेखाएँ हैं?
(iii) क्या सभी चित्रों में AB (खड़ी रेखा) सममित रेखा है?
(iv) क्या ऐसा कोई चित्र है जिसमें एक भी सममित रेखा नहीं है?

www.rajteachers.com

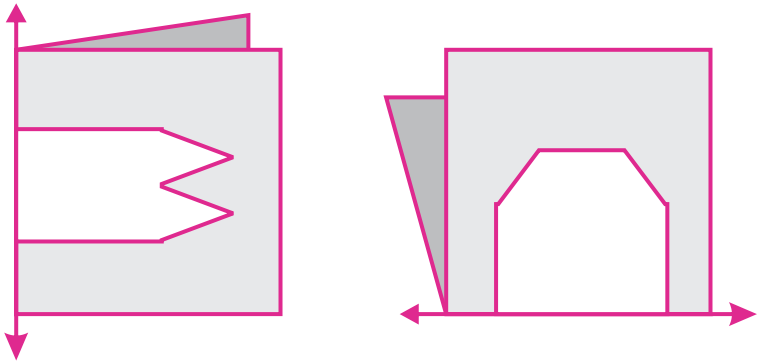
11.2 सममिति देखना

एक रंगीन कागज लेकर बीच से मोड़िए। चित्र में दिखाए अनुसार कैंची से कोई आकृति किनारे से काटिए। कागज को खोलिए और देखिए।



यही काम कागज को एक से अधिक बार मोड़ कर कीजिए। आपको मजेदार आकृतियाँ मिलेंगी।

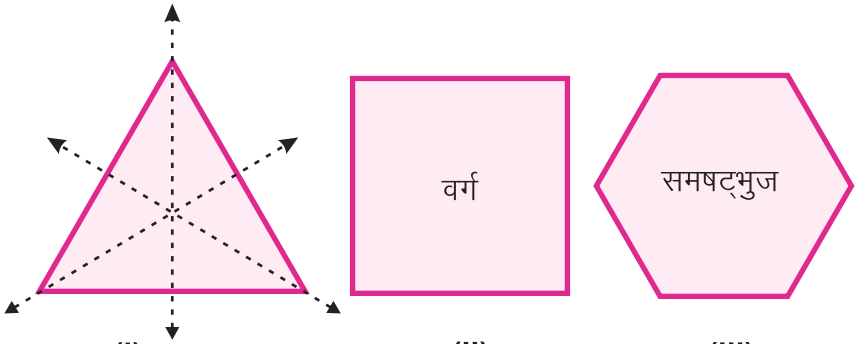
यहाँ पर मुड़ी हुई शीट की कुछ आकृतियाँ दी गई हैं जिनकी तह पर आकृतियाँ बनाई गई हैं। प्रत्येक में पूर्ण आकृति की रूपरेखा खींचिए जो डिजाइन काटने के बाद दिखाई देगी।



11.3 एक से अधिक सममित रेखाएँ

ऊपर दिए उदाहरण से हमने पाया कि सममित रेखा उर्ध्वाधर, क्षैतिज अथवा तिरछी भी हो सकती है। कई चित्रों में सममित रेखा एक से अधिक भी हो सकती है।

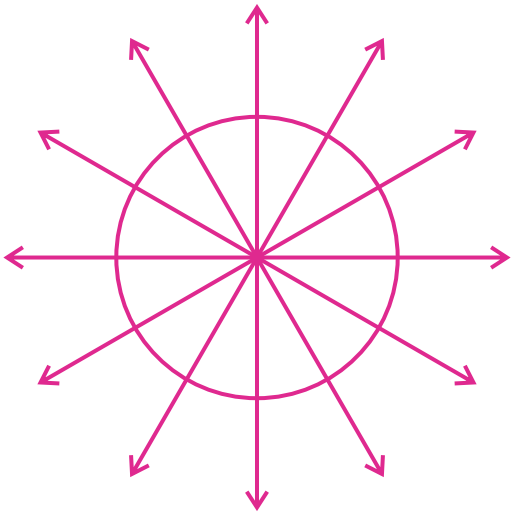
नीचे दिए गए चित्रों में कितनी सममित रेखाएँ बनाई जा सकती है?



आकृति 11.5

www.rajteachers.com

उक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि किसी चित्र में एक से अधिक सममित रेखाएँ हो सकती हैं यह रोचक बात है कि समबाहु त्रिभुज में तीन, वर्ग में चार तथा समपंचभुज में पाँच सममित रेखाएँ बनती हैं। इसी प्रकार सम बहुभुज में सममित रेखाओं की संख्या सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या के साथ बढ़ती जाएगी। अब बताइए 12 भुजा वाले सम बहुभुज में कितनी सममित रेखाएँ होगी? **इसी प्रकार वृत्त अनंत भुजाओं वाला बहुभुज है अतः इसकी अनंत सममित रेखाएँ हो सकती हैं।**



आकृति : 11.6

प्रश्नावली 11

1 (a) नीचे दिए गए चित्रों में सममित आकृतियाँ छाँटिए।



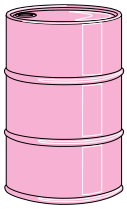
(i)



(ii)



(iii)



(iv)



(v)



(vi)



(vii)

(b) वे आकृतियाँ बताइए जिनमें एक से अधिक सममित रेखाएँ हैं।

www.rajteachers.com

2. नीचे अंग्रेजी वर्ण माला के कुछ अक्षर दिए गए हैं प्रत्येक के लिए सममिति की जाँच कीजिए।

A B C E O G H K N W I Z

(i) कौनसे वर्णाक्षर सममित नहीं हैं?

(ii) कौनसे वर्णाक्षर सममित हैं?

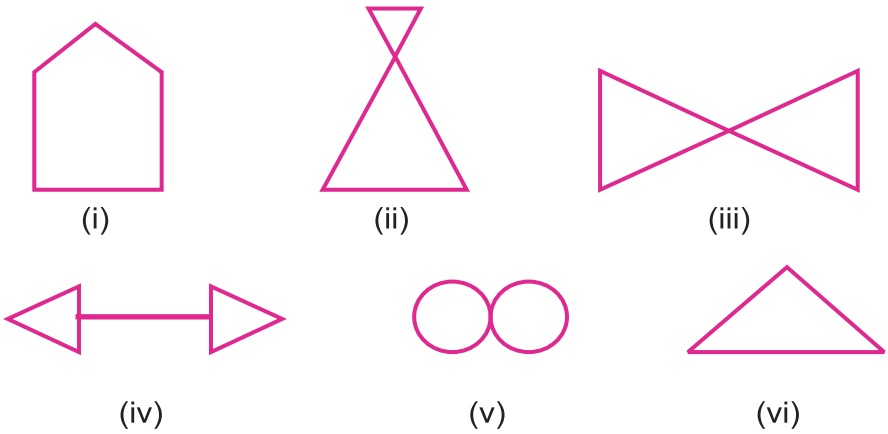
(iii) किन वर्णाक्षरों में उर्ध्वाधर सममित रेखा है?

(iv) किन वर्णाक्षरों में क्षैतिज सममित रेखा है?

(v) किन वर्णाक्षरों में उर्ध्वाधर एवं क्षैतिज दोनों सममित रेखाएँ हैं?

(vi) किन वर्णाक्षरों में दो से अधिक सममित रेखाएँ हैं?

3. नीचे दी गई आकृतियों में सममित रेखाओं की संख्या बताइए।



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

4. दो सममित रेखाओं वाली अलग–अलग आकृतियाँ बनाइए।

5. अपने घर एवं विद्यालय में उपलब्ध 10 वस्तुओं की सूची बनाकर इनके चित्र अपनी कॉपी में बनाइए तथा बताइए इनमें से कौन–कौनसी सममित हैं? इनकी सममित रेखा भी बनाइए।

हमने सीखा

1. एक आकृति में सममित रेखा होती है यदि वह रेखा आकृति को दो एक–समान भागों में विभक्त करे अर्थात् उस रेखा के अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर उसके दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाएँ।

2. किसी समबहुभुज में उतनी ही सममित रेखाएँ होगी जितनी उसमें भुजाओं की संख्या होगी।

समबहुभुज	सममित रेखाओं की संख्या
समबाहु त्रिभुज	3
वर्ग	4
समपंचभुज	5
समषट्भुज	6

www.rajteachers.com

अध्याय 12

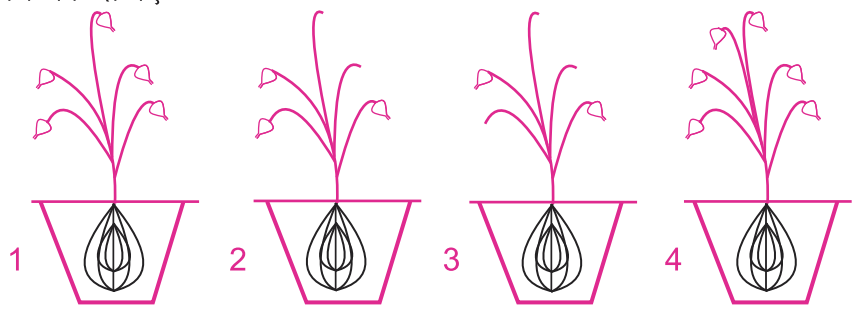
बीजगणित

12.1 पूर्व में हमने अंक गणित में 0,1,2,3,.....8,9 अंको के द्वारा बनी विभिन्न संख्याएँ और उन पर विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है। अपने दैनिक जीवन की अधिकांश समस्याओं को हल करने में संख्याओं का उपयोग हम देख चुके हैं। संख्याओं से संबंधित जटिल समस्याओं का हल कई बार अंकगणितीय विधियों से नहीं हो पाता अथवा समस्याओं के हल को प्रभावशाली ढंग से प्रस्तुत करने हेतु अन्य तरीकों की आवश्यकता होती है।

अतः अंकगणित के व्यापकीकरण के लिए बीजीय राशियों का प्रयोग किया जाता है। यहाँ हम इन संख्याओं को अलग तरीके से लिखने के बारे में अध्ययन करेंगे, जिसमें संख्याओं को दर्शाने के लिए हिन्दी अक्षरों जैसे –(क, ख, ग, घ, य, र, ल,...) अथवा अंग्रेजी अक्षरों (a, b, c, x, y, z...) आदि का उपयोग करते है। इन्हें **बीज या बीजांक** कहते है।

12.2 चर की अवधारणा

निम्न चित्र को देखिए–



चित्र में कुछ बीजों को रोपा गया है। हर बीज से प्राप्त फलों की संख्या निम्न प्रकार है –

बीज 1	फल संख्या = 5
बीज 2	फल संख्या = 3
बीज 3	फल संख्या = 2
बीज 4	फल संख्या = 6

यदि हम प्राप्त फलों की संख्या को अंग्रेजी के वर्णाक्षर x से प्रदर्शित करें तो–

बीज 1 के लिए	$x = 5$
बीज 2 के लिए	$x = 3$
बीज 3 के लिए	$x = 2$
बीज 4 के लिए	$x = 6$

इस प्रकार x का मान (फलों की संख्या) विभिन्न बीजों के लिए भिन्न–भिन्न प्राप्त होता है। जिसे चर (परिवर्तनशील) राशि कहते हैं।

इस प्रकार अलग–अलग परिस्थितियों में जिसका मान बदलता हैं उसे **चर राशि** तथा अंकगणितीय संख्याओं (जिनका मान स्थिर होता है) को **अचर राशि** कहा जाता है।

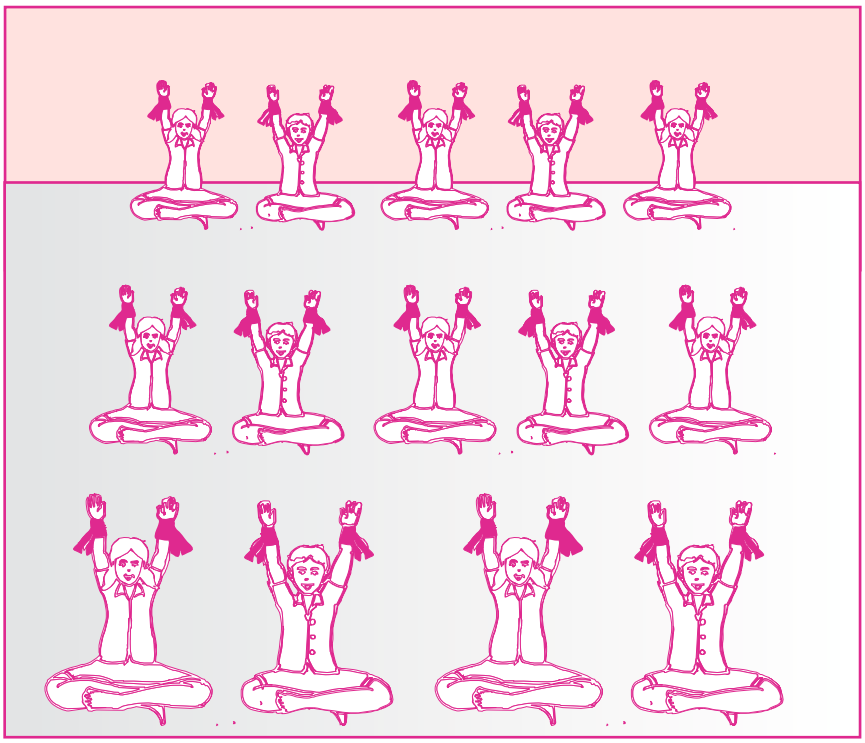
करो और सीखो

1. यदि उम्र को हम y वर्षों में व्यक्त करें तो अपने 10 साथियों की उम्र के लिए y का मान लिखिए।

www.rajteachers.com

12.2.1 योग की कक्षा

आप के विद्यालय में योग का कालांश हो रहा है। सभी बच्चों के हाथ में एक–एक रिबन बंधा है तथा सभी बच्चे हाथ ऊपर करके योग कर रहे हैं। एक विद्यार्थी के दोनों हाथों में 2 रिबन है। अतः चित्र की सहायता से तालिका में भरिए।



बच्चों की संख्या	1	2	3	4	5						
रिबन की संख्या	2	4	6	8	10						

तालिका 12.1

10 बच्चों के पास कितने रिबन होंगे?

सारणी के अनुसार 2 x 10 होंगे।

अतः रिबन की संख्या = 2 x बच्चों की संख्या

यदि बच्चों की संख्या n हो तो

रिबनों की संख्या 2 x n

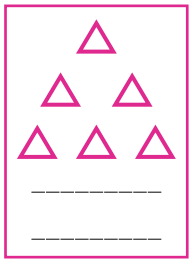
n =1, 2, 3, 4, ----------

सारणी के अनुसार जैसे–जैसे n का मान बढ़ता है, रिबन की संख्या भी बढ़ती जाती है।

www.rajteachers.com

12.2.2 पैटर्न में सामान्यीकरण के रूप में

माचिस की तीलियों का खेल पिछली कक्षा में हमने कुछ प्रतिरूप देखे थे और चीनू और छोटू माचिस की तीलियों के प्रतिरूप बना रहे हैं। उन्होंने त्रिभुज की आकृतियाँ बनाने का निर्णय लिया। उन्होंने दो त्रिभुज बनाए उनको देख वहाँ रामू आया और तीसरा त्रिभुज बनाया। उसने चीनू से कहा कि आगे के त्रिभुजों के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता पड़ेगी ? आगे एक सारणी बनाते हैं–



आकृति 12.1

त्रिभुजों की संख्या	1	2	3	4	5	6
तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	18

तालिका 12.2

इसी प्रकार 8 त्रिभुज का प्रतिरूप बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?

अर्थात् तीलियों की संख्या = 3 x त्रिभुजों की संख्या

यदि त्रिभुजों की संख्या T हो तो

तीलियों की संख्या = 3 x T

यहाँ T चर राशि का एक उदाहरण है जिसका मान स्थिर नहीं है।

T = 1, 2, 3, 4 ...

12.3 बीजीय व्यंजक

तीलियों का खेल– राजू ने टेबल पर एक तीली लगाई। पप्पू ने दो तीली और लगाकर एक खुला डिब्बा बनाया। कविता ने भी पप्पू की तरह दो और तीली लगाई और दूसरा खुला डिब्बा साथ में बनाया। इसी प्रकार संजू ने भी कविता की तरह दो तीली लगाई। तीसरा खुला डिब्बा बन गया। इसी तरह 8 डिब्बे बनाने में कितनी तीलियाँ चाहिए आओ सारणी बनाते हैं

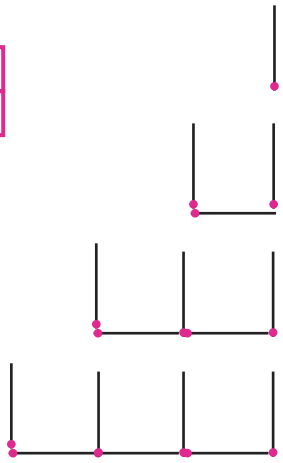
डिब्बों की संख्या	1	2	3	4	--	n
तिलियों की संख्या	3	5	7	---	--	---

तालिका 12.3

इस प्रकार हमें प्रत्येक नये डिब्बे के लिये 2 तीलियाँ जोड़नी पड़ी जैसे–

पहला डिब्बा = 1 + 2 x 1
दूसरा डिब्बा = 1 + 2 x 2
तीसरा डिब्बा = 1 + 2 x 3

n डिब्बों के लिए = 1 + 2 x n = 1 + 2 n यहाँ n चर राशि है।



आकृति 12.2

(1+2n) एक बीजीय व्यंजक का उदाहरण है जब बीजांकों की जोड़, घटा, गुणा व भाग किया जाता है जैसे (1+2n) व्यंजक में n का 2 से गुणा कर 1 जोड़ा गया है, तो बीजीय व्यंजक बनता है। कोई चर या अचर संख्या या समूह मौलिक गणितीय संक्रियाओं के चिह्नों से युक्त होने पर वह कथन बीजीय व्यंजक कहलाता है। ये एक पदीय, द्विपदीय आदि बहुपदीय होते हैं।

www.rajteachers.com

नीचे आने वाली कुछ पंक्तियों में हम देखेंगे कि कैसे व्यंजक बनाए जाते हैं?

	व्यंजक	कैसे बनाया गया
(i)	2 + 7	2 में 7 जोड़ने पर
(ii)	x + 9	x में 9 जोड़ने पर
(iii)	P + q	P में q जोड़ने पर
(iv)	a - 3	a में 3 घटाने पर
(v)	3 - b	3 में b घटाने पर
(vi)	x - y	x में y घटाने पर
(vii)	3 x x	3 में x का गुणा करने पर
(viii)	$\frac{13}{a}$	13 में a का भाग देने पर
(ix)	$\frac{x}{y}$	x में y का भाग देने पर

इसी प्रकार के दस अन्य सरल व्यंजक लिखिए और बताइए कि वे किस प्रकार बनाए गए हैं ?

करो और सीखो

1. बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए।
   (i) 5 और किसी संख्या का योग _____
   (ii) किसी संख्या और 7 का अंतर _____
   (iii) किसी संख्या का 3 गुना _____
   (iv) किसी संख्या के 6 गुने में से 12 कम _____
   (v) किसी संख्या का आधा _____
   (vi) किसी संख्या के एक तिहाई में से 200 कम _____
2. श्वेता के गणित में 75 अंक हैं विज्ञान के अंक पता नहीं है उन्हे x मानकर कुल अंक बताइए .....
3. साक्षी के पास कुछ टॉफियाँ है और आशु के पास उससे चार गुनी टॉफियाँ है तो दोनों के पास कुल कितनी टॉफियाँ हैं? .....

कथन दिए जाने पर व्यंजक बनाना–

	कथन	व्यंजक
(i)	z में से 7 घटाने पर	z - 7
(ii)	p में 4 घटाने पर	p - 4
(iii)	a में 16 घटाने पर	a - 16
(iv)	y में 3 का भाग देने पर	$\frac{y}{3}$

www.rajteachers.com

	कथन	व्यंजक
(v)	m में 7 का गुणा करने पर	7 m
(vi)	x में 3 का गुणा करने पर	$3x$
(vii)	5 में x का गुणा करने पर	$5x$

करो और सीखो

नीचे कुछ बीजीय व्यंजक एवं उनके सामने उनकी परिस्थितियाँ दी गई है प्रत्येक बीजीय व्यंजक के लिए उपर्युक्त परिस्थितियों से मिलान किजिए।

(i) $x+4$ (A) प्रशान्त के पास कमली से 4 गुना धन है।

(ii) $x-4$ (B) मालती के पास सीमा से 4 रू. अधिक है।

(iii) $4-x$ (C) मेरा भार नन्हे के भार से चार किग्रा कम है।

(iv) $4y$ (D) मेरे पास 4 रूपये थे उसमें से कुछ रूपये खर्च हो गए तो मेरे पास धन शेष बचा।

(v) $\frac{y}{4}$ (E) बंशी के पास कुछ कंचे थे उन्हें उसने 4 दोस्तों में बराबर बाँट दिए तो प्रत्येक को मिले कंचों की संख्या।

प्रश्नावली 12.1

1. नीचे दिए गए वर्णों के प्रतिरूप तीलियों की सहायता से बनाइए। प्रतिरूप के चित्र अपनी कॉपी में बनाइए। प्रत्येक प्रतिरुप में तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए नियम बनाइए (आप नियम बनाने के लिए बीजांकों का उपयोग कर सकते हैं यथा a, b, x, y आदि)

   (i) T का प्रतिरूप T, TT, ...

   (ii) N का प्रतिरुप N, NN, ...

   (iii) W का प्रतिरूप W, WW, ...

2. वृक्षारोपण कार्यक्रम में विद्यालय में पौधे लगाए जाने हैं। प्रत्येक पंक्ति में चार पौधे लगते हैं तो पौधों की संख्या को पंक्तियों के पदों में लिखिए।

3. रानू, लीला से 5 वर्ष छोटी है।

   (i) लीला की आयु x लेकर रानू की आयु x के पदों में लिखिए।

   (ii) रानू की आयु P लेते हुए लीला की आयु P के पदों में लिखिए।

4. एक पेन का मूल्य 5 रु. है, मदन के पास कुछ धन हैं वह उस समस्त धन से पेन खरीदता है। पेनों की संख्या को धन के पदों में व्यक्त कीजिए।

www.rajteachers.com

5. निम्न तालिका को पूर्ण कीजिए।

x	1	2	3	4	5	---	---
$2x+3$	5	7	---	---	--	15	---

12.4 बीजीय व्यंजकों के नियम

12.4.1 क्रम विनिमेयता

(i) योग में :– हम जानते हैं किन्हीं भी दो पूर्ण संख्याओं का योगफल क्रम बदलने से नहीं बदलता है।

$$2 + 5 = 5 + 2$$

संख्याओं का यह गुण योग की क्रम विनिमेयता कहलाता है अर्थात् संख्याओं का क्रम बदलने से उनका योगफल वही रहता है इसी प्रकार यदि x तथा y दो चर संख्याएँ हैं तो

$$\boxed{x + y = y + x}$$

(ii) गुणन में :– इसी प्रकार दो संख्याओं के गुणन के लिए

$$5 \times 2 = 2 \times 5 = 10$$

अर्थात् दो संख्याओं के गुणा में संख्याओं का क्रम बदलने से गुणनफल पर कोई फर्क नहीं पड़ता यह गुणन की क्रम विनिमेयता कहलाती है।

$$\boxed{x \times y = y \times x}$$

12.4.2 वितरणता– मान लीजिए हमें 8 x 35 को ज्ञात करना है और हमें 35 का पहाड़ा नहीं आता है, तो इसकी गणना निम्न प्रकार कर सकते है –

$$\begin{aligned} 8 \times 35 &= 8 \times (30 + 5) \\ &= 8 \times 30 + 8 \times 5 \\ &= 240 + 40 \\ &= 280 \end{aligned}$$

इसी प्रकार व्यापक रूप में चरों x, y व z के लिए

$$\boxed{x \times (y + z) = x \times y + x \times z}$$

यह नियम संख्याओं के योग पर गुणन की वितरणता कहलाती है।

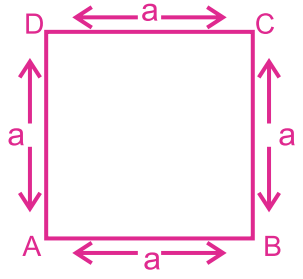
12.4.3 ज्यामिति के नियम (बीजीय रूप में)

हम क्षेत्रमिति में वर्ग एवं आयत के परिमाप भी बीजीय व्यंजक के रूप में लिख सकते हैं। हम जानते हैं कि किसी भी बहुभुज का परिमाप उसकी सभी भुजाओं का योग होता है।

(i) वर्ग का परिमाप

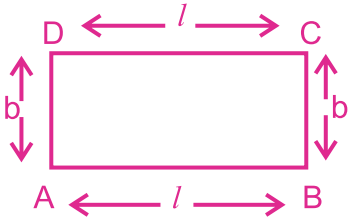
वर्ग ABCD का परिमाप

$$\begin{aligned} &= AB + BC + CD + DA \\ &= a + a + a + a \\ &= 4a \\ &= 4 \times \text{भुजा} \end{aligned}$$



www.rajteachers.com

(ii) आयत का परिमाप :– आयत में आमने सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं। AB व CD को हम लम्बाई l तथा BC व DA को चौड़ाई b ले तो



अतः आयत का परिमाप

= AB की लम्बाई +BC की लम्बाई

+CD की लम्बाई +AD की लम्बाई

अतः आयत का परिमाप $p = l + b + l + b$

$= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

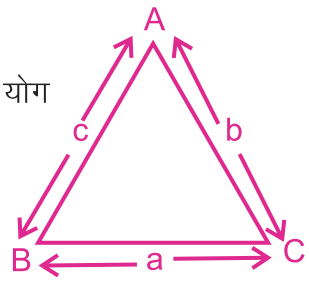
जहाँ l व b चर है जिनका मान अलग–अलग आयत में अलग–अलग होता है

(iii) त्रिभुज का परिमाप

त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लम्बाईयों का योग

= BC + AC + AB

= a + b + c



प्रश्नावली 12.2

1 संख्या 3, 7 और 4 से संख्यात्मक व्यंजक बनाइए।

(i) केवल जोड़ एवं घटाव के चिह्नों का प्रयोग करते हुए

(ii) केवल गुणा व जोड़ का प्रयोग करते हुए

2. नीचे दिए व्यंजकों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि वे बीजीय व्यंजक हैं या संख्यात्मक व्यंजक।

(i) $3x + 5$ (ii) $5 \times 4 + 7$ (iii) $3 + 4 \times 3 + 5$ (iv) $2x + 1$ (v) $\frac{x}{2} + 5 - x$ (vi) $3x$

3. निम्न व्यंजकों को ध्यान में से देखिए तथा बताइए प्रत्येक को बनाने में जोड़, घटा, गुणा और भाग में से किन–किन संक्रियाओं का प्रयोग हुआ है। सम्बन्धित संक्रिया वाले स्तम्भ में सही/गलत का निशान लगाइए।

क्र.स.	व्यंजक	जोड़	घटाव	गुणा	भाग
1	$x + 5$				
2	$7m + 3$				
3	$y - 3x$				
4	$x - y - z$				
5	$3x - 10 - \frac{z}{5}$				
6	$\frac{y}{17}$				

www.rajteachers.com

4. निम्नलिखित स्थितियों के लिए बीजीय व्यंजक लिखिए।

(i) a में 7 जोड़ना (ii) b में से 10 घटाना (iii) x का 4 से गुणा

(iv) x में 4 से भाग (v) 7 में से x घटाना (vi) 10 में q का भाग

5. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक लिखिए।

(i) 2n में 15 जोड़ना (ii) $2x$ में 15 घटाना

(iii) p के दुगुने में 3 जोड़ना (iv) q के दुगुने में 3 घटाना

(v) y को 5 से गुणा कर उसमें से 11 घटाना

(vi) z को -3 से गुणा कर उसमें 11 जोड़ना

6. q, 5 व -3 का प्रयोग करते हुए बीजीय व्यंजक लिखिए।

7. यदि नाथू के पास x रुपये हैं, तो बताइए –

(i) बीना के पास नाथू के धन से दुगना धन है तो उसके पास कितना धन है ?

(ii) नाथू ने 150 रुपयों की पुस्तकें खरीदी उसके पास कितना धन बचा ?

(iii) नाथू के प्रारम्भिक धन का आधा सीमा के पास है सीमा के पास कितने रुपये हैं ?

(iv) मिली के पास नाथू के धन से 3 गुना धन है।

8. एक त्रिभुज की ऊँचाई उसके आधार के दुगुने से 5 अधिक है। उसकी ऊँचाई क्या होगी यदि आधार b है।

9. यदि विमल की वर्तमान आयु p वर्ष है, तो बताइए –

(i) आज से 10 वर्ष पूर्व उसकी उम्र क्या थी ?

(ii) 5 वर्ष पश्चात् विमल की आयु क्या होगी ?

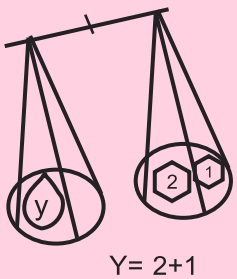
(iii) विमल की चाची उससे 3 गुना उम्र की है। चाची की उम्र क्या होगी ?

(iv) विमल की आयु के दुगुने से 5 कम करने पर विमल की माँ की आयु प्राप्तहोती है। माँ की आयु क्या होगी?

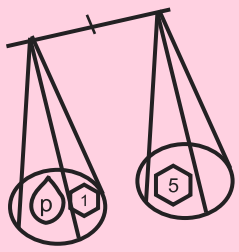
12.5 समीकरण से परिचय

सीमा ने एक पपीता खरीदा जिसे फल बेचने वाले ने तराजू के एक पलड़े में रखा और दूसरे पलडे में 2 किग्रा का बाट रखने पर तुला संतुलित हुई तो उसने पपीते का तौल 2 किग्रा बताया। उस पपीते का तौल चर राशि x मानकर हम इसे एक गणितीय वाक्य $x = 2$ के रूप में लिख सकते हैं।

निम्न स्थितियों में गणितीय वाक्य देखिए।



Y= 2+1



P+1=5

ये गणितीय वाक्य समीकरण कहलाते हैं।

www.rajteachers.com

12.5.1 कथन से समीकरण

निम्नलिखित कथनों से बने समीकरण देखिए।

किसी संख्या का दुगुना 10 है	$2n = 10$
किसी संख्या के तीन गुने से पाँच अधिक, 17 है।	$3n + 5 = 17$
किसी संख्या के आधे से 3 कम 6 है।	$\frac{x}{2} - 3 = 6$
किसी संख्या के दुगने में 15 जोड़ने पर 51 हो जाता है।	----------

12.5.2 समीकरण से कथन

$3x = 21$	किसी संख्या का तीन गुना 21 है।
$2x - 7 = 19$	किसी संख्या के दुगुने से 7 कम 19 होता है।
$23 = 4x + 3$	23 किसी संख्या के चार गुने से 3 अधिक है।
$3x - 7 = 11$	.....

अतः चर एवं अचरों में सम्बन्ध जिसमें गणितीय संक्रियाओं के साथ–साथ **"="** का प्रयोग किया जाता है **समीकरण** कहलाता है। समीकरण में दो पक्ष **बायाँ पक्ष** एवं **दायाँ पक्ष** होते हैं जिनको समता के चिह्न से पृथक किया जाता है।

12.5.3 समीकरण का हल

निम्नलिखित समीकरण में x के स्थान पर क्या मान रखें कि समीकरण संतुलित हो जाए। आओ करके देखें।

बायाँ पक्ष $x + 1 = 5$ दायाँ पक्ष

x का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष	निष्कर्ष
0	0 + 1 = 1	5	बराबर नहीं
1	1 + 1 = 2	5	बराबर नहीं
2	2 + 1 = 3	5	बराबर नहीं
3	3 + 1 = 4	5	बराबर नहीं
4	4 + 1 = 5	5	बराबर

www.rajteachers.com

अतः x का मान 4 रखने पर बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाता है अतः x का मान 4 रखने पर समीकरण संतुष्ट हो जाता है।

एक और समीकरण $3x-2=2x+1$ पर विचार करते हैं

x का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष	निष्कर्ष
0	$3\times0-2=-2$	$2\times0+1=1$	बराबर नहीं
1	$3\times1-2=3-2=1$	$2\times1+1=2+1=3$	बराबर नहीं
2	$3\times2-2=6-2=4$	$2\times2+1=4+1=5$	बराबर नहीं
3	$3\times3-2=9-2=7$	$2\times3+1=6+1=7$	बराबर

अतः समीकरण में चर के संभावित मान रखने पर जो मान उसको संतुष्ट करता है वह समीकरण का हल कहलाता है। इस विधि को हम प्रयत्न एवं भूल विधि कहते हैं।

प्रश्नावली 12.3

1. नीचे कुछ गणितीय कथन लिखे गए हैं। बताइए इनमें से कौन–कौन समीकरण हैं। यह भी बताइए कि जो समीकरण हैं उनमें चर क्या है?

(i) $5x=0$ (ii) $t-7>5$ (iii) $4\div2=2$

(iv) $2x-1<5$ (v) $7=14\times2+q$ (vi) $15000=2t+3500$

2. समीकरण $10y=50$ में चर के मान $y=10, y=8$ तथा $y=5$ रख कर देखिए किस मान से समीकरण सन्तुष्ट होता हैं।

3. नीचे समीकरण के संभावित हल दिए गए हैं समीकरण में मान रखकर देखिए क्या यह दिए गए चर के मान के लिए सन्तुष्ट है ?

(i) $3x-7=5$ $x=5$ (ii) $3p+2=8$ $p=2$

4. दिए गए समीकरण के लिए सारणी को पूरा कीजिए व समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

(i) $3x=15$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$3x$	0	3						

(ii) $\frac{P}{3}=4$

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{P}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$									

www.rajteachers.com

(iii) $x - 3 = 5$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x-3$	-2	-1	0								

हमने सीखा

1. हमने तीलियों की सहायता से प्रतिरूप बनाना सीखा। हमने किसी आकार को कईं बार बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के व्यापक नियम बनाए।
2. चर राशियाँ कई मान ग्रहण करती हैं। इनका मान स्थिर नहीं रहता है जैसे वृत्त की त्रिज्या कुछ भी ले सकते हैं परन्तु एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग एक अचर राशि है यह परिवर्तित नहीं होता है।
3. चर राशियों को हम x, y, z, p, q आदि द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
4. हमने चर राशियों एवं अचर राशियों में संक्रियाओं का उपयोग कर व्यंजक बनाए।
   जैसे $x+4$, $x-3$, $3p$, $4q$ आदि।
5. चर राशियों में क्रमविनिमेयता योग एवं गुणन में लागू होती है।
   $a+b=b+a$ एवं $a \times b = b \times a$
6. समीकरण चर पर एक प्रतिबन्ध होता है इसे एक चर वाला व्यंजक बराबर एक स्थिर संख्या के रूप में भी ले सकते हैं।
   जैस $x+4=8$ है।
7. एक चर वाले समीकरणों को प्रयत्न एवं भूल विधि द्वारा हल करना सीखा।
   इसमें हम चर को विभिन्न मान तब तक देते हैं जब तक वह सही मान प्राप्त न कर लें जो समीकरण को संतुष्ट करता है।

www.rajteachers.com

अध्याय 13

अनुपात व समानुपात

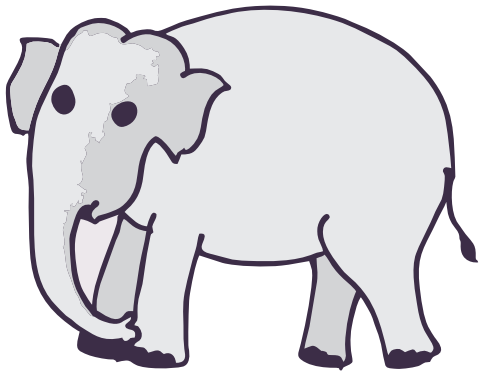
13.1 दलजीत तथा कान्हा दो पशुपालक हैं। दलजीत के पास 50 गायें तथा कान्हा के पास 200 गायें हैं। दलजीत तथा कान्हा की गायों की संख्या में अन्तर द्वारा तुलना करने पर हम पाते हैं कि कान्हा के पास दलजीत से 200–50 =150 गायें अधिक हैं। इसी प्रकार दैनिक जीवन में हमें कई परिस्थितियों में तुलना करने की आवश्यकता होती है।

हम जानते है कि एक वयस्क हाथी का भार सामान्यतः 2000 किग्रा से 5000 किग्रा के बीच होता है। वहीं एक सामान्य वयस्क मनुष्य का भार 50 से 100 किग्रा के बीच होता है।

यदि दिए गए चित्र में आदमी का वजन 75 किग्रा और हाथी का वजन 2550 किग्रा हो तो इनके वजन की तुलना अन्तर के माध्यम से करने पर

2550 किग्रा – 75 किग्रा = 2475 किग्रा





यहाँ हम देखते है कि दोनों के वजन में अन्तर अधिक है। ऐसी परिस्थिति में अन्तर विधि द्वारा तुलना करना उचित नहीं होता है। यह तुलना हम निम्न प्रकार करके देखते हैं –

$$\frac{\text{हाथी का भार}}{\text{मनुष्य का भार}} = \frac{2550}{75} = \frac{34}{1}$$

अतः दिए गए हाथी का भार मनुष्य के भार का 34 गुना है।

अतः हम कह सकते है कि जब दो वस्तुओं की तुलना करते समय यदि उनमें गुणात्मक अन्तर अधिक हो तो भाग द्वारा तुलना करना अन्तर द्वारा तुलना करने से ज्यादा सार्थक है।

भाग द्वारा की गई तुलना को अनुपात कहा जाता है।

13.2 अनुपात की अवधारणा

यदि हकीम खां का वजन 25 किलो ग्राम और उसके पिता का वजन 75 किलो ग्राम है, तो पिता का वजन पुत्र के वजन से कितना गुना है?

$\frac{75 \text{ किग्रा}}{25 \text{ किग्रा}} = \frac{3}{1}$ अर्थात् यह तीन गुना हैं।

इस उदाहरण में हमने दो राशियों की तुलना ''कितने गुनी'' के रूप में की है यह तुलना अनुपात कहलाती है। तथा इसे '' : '' चिह्न द्वारा दर्शाते हैं।

www.rajteachers.com

करो और सीखो

1. एक पेन का मूल्य 10 रू है और पेंसिल का मूल्य 2 रू है। पेन के मूल्य का पेंसिल के मूल्य से अनुपात क्या होगा ?
2. रवि एक घंटे में 6 कि.मी. चलता है जबकि सूरज एक घंटे में 4 कि.मी. चलता है। रवि द्वारा तय की गई दूरी से सूरज द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात बताइए ?

मीना के पास 15 रू है और शहनाज के पास 30 रू है तो

1. मीना के रूपये शहनाज के रूपये से कितने गुना है ?

$$\frac{\text{मीना के रूपये}}{\text{शहनाज के रूपये}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ (आधा)}$$

या 1 : 2

अतः मीना के पास शहनाज से आधे रूपये है।

2. शहनाज के रूपये मीना के रूपये से कितने गुना है ?

$$\frac{\text{शहनाज के रूपये}}{\text{मीना के रूपये}} = \frac{30}{15} = \frac{2}{1} \text{ (दो गुना)}$$

या 2 : 1

अतः शहनाज के पास मीना से दुगने रूपये है। इसका मतलब 1 : 2 व 2 : 1 दोनों अनुपात एक दूसरे से अलग हैं।

अतः भाग द्वारा तुलना करते समय किसकी तुलना किससे की जाती है यह ध्यान रखना भी जरूरी है।

निम्न उदाहरण को ध्यान में रखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

पहली संख्या	दूसरी संख्या	दूसरी संख्या पहली संख्या से कितनी गुना है	अनुपात	पहली संख्या दूसरी संख्या से कितनी गुना है	अनुपात
2 सेब	6 सेब	3 गुना है	3 : 1	एक तिहाई है	1 : 3
500 ग्राम गुड़	1000 ग्राम गुड़	.....	.....	.....	.....
टी शर्ट 200 रू	कोट 1000 रू	.....	.....	.....	.....

हामिद के पास 5 बकरियाँ है, तथा कालू के पास 8 साईकिलें हैं। क्या इनको अनुपात के रूप में दर्शाया जा सकता है? सोचिए।

बकरियों की संख्या तथा साइकिलों की संख्या क्या सजातीय राशियाँ हैं? नहीं।

दोनों सजातीय राशियाँ नहीं है, अतः इनमें सम्बन्ध स्थापित नहीं होता है या तुलना नहीं की जा सकती अतः इनमें अनुपात नहीं बताया जा सकता है।

www.rajteachers.com

दो राशियों में सम्बन्ध, तुलना या अनुपात दर्शाने के लिए वे सजातीय तथा मापन की एक ही इकाई में होना आवश्यक है।



उदाहरण 1 सौरभ घर से स्कूल पहुँचने में 15 मिनट लेता है और सचिन एक घंटा लेता है। सौरभ द्वारा लिए गए समय और सचिन द्वारा लिए गए समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल दोनों की इकाईयाँ समान नहीं है अतः उन्हें समान इकाई में बदलने पर सौरभ को घर से स्कूल पहुँचने में लगा समय 15 मिनट।

सचिन को घर से स्कूल पहुँचने में लगा समय 60 मिनट।

अतः वांछित अनुपात है

$$15 \text{ मिनट} : 60 \text{ मिनट} = \frac{15}{60} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

अतः सौरभ द्वारा व सचिन द्वारा लिए गए समय का अनुपात 1 : 4 है।

उदाहरण 2 कक्षा 6 में कुल 45 बच्चे पढ़ते हैं जिसमें से 25 लड़कियाँ हैं और शेष लडके हैं। निम्न के अनुपात ज्ञात कीजिए।

(i) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से

(ii) लड़कों की संख्या का लडकियों की संख्या से

हल लड़कियों की संख्या 25

लड़कों की संख्या $45 - 25 = 20$

अतः लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात $= 25 : 20 = 5 : 4$

और लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या के साथ अनुपात $20 : 25 = 4 : 5$

ध्यान दें कि 5 : 4 और 4 : 5 में अंतर है।

करो और सीखो

सुबह 9 बजे से 10 बजे के बीच सड़क पर गुजरने वाले वाहनों को तालिका में दिया गया है।

वाहन	संख्या
दुपहिया	24
कार	60
ट्रक	40

1. दुपहिया वाहन एवं कार की संख्या में अनुपात बताइए।
2. कुल वाहनों की संख्या व ट्रकों की संख्या में अनुपात बताइए।
3. एक कार का वजन 3300 पाउण्ड है व एक साईकिल का वजन 22 पाउण्ड है साईकिल व कार के वजनों का अनुपात क्या है ?

www.rajteachers.com

13.2.1 विभिन्न परिस्थितियों में अनुपात

राहुल और खुशी ने एक व्यापार शुरू किया और 4 : 5 में धन लगाया। एक वर्ष बाद कुल लाभ 54,000 रु. था।

लाभ को बाँटते वक्त राहुल ने कहा कि हम लाभ को बराबर बाँट लेते हैं। खुशी ने उत्तर दिया, ''मुझे ज्यादा मिलना चाहिए क्योंकि मैंने ज़्यादा निवेश किया है। तब दोनों द्वारा यह निर्णय लिया गया कि निवेश के अनुपात में ही लाभ को बाँटा जाएगा।

यहाँ 4 : 5 में 4 और 5 दो ही राशियाँ है इन राशियों का योग 4 + 5 = 9

इसका क्या अर्थ है?

इसका अर्थ कि यदि 9 रु. लाभ है तो राहुल को 4 रुपये और खुशी को 5 रुपये मिलेंगे।

और हम कह सकते हैं कि जो भी लाभ होगा उसके 9 हिस्सों में से 4 हिस्से राहुल को और 5 हिस्से खुशी को मिलेंगे। यदि कुल लाभ 54,000 रुपये हो तो प्रत्येक का हिस्सा कितना होगा ?

यहाँ कुल लाभ 54000 रू. है जिसके 9 हिस्से हुए = $\frac{54000}{9}$

राहुल का हिस्सा = $\frac{54000}{9}$ x 4 = 24000 रूपये

खुशी का हिस्सा = $\frac{54000}{9}$ x 5 = 30000 रूपये

सोचिए 4:5 या $\frac{4}{5}$

और 24000 : 30000 या $\frac{24000}{30000}$

= $\frac{4}{5}$? (क्यों)

उदाहरण 3 रिया और कंचन के बीच 45 रुपये को 1 : 2 में बाँटिए।

हल अनुपात के दो हिस्से 1 और 2 है

अतः दोनों हिस्सों का योग 1 + 2 = 3

इसका अर्थ है कि यदि 3 रुपये है तो रिया को 1 रुपये और कंचन को 2 रुपये मिलेंगे। यानि कि 3 में से रिया को एक हिस्सा और कंचन को 2 हिस्से मिलेंगे।

अतः रिया का हिस्सा = $\frac{1}{3}$ x 45 = 15 रुपये।

और कंचन का हिस्सा = $\frac{2}{3}$ x 45 = 30 रुपये।

करो और सीखो

(1) अपनी कक्षा के दरवाजे की संख्या का खिड़कियों की संख्या से अनुपात निकालिए।

(2) एक आयत बनाइए। उसकी लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात निकालिए।

www.rajteachers.com

13.2.2 तुल्य अनुपात

निम्न को देखिए–

1. एक कमरे की लम्बाई 30 मीटर और चौड़ाई 20 मीटर है। अतः कमरे की लम्बाई और चौडाई में क्या अनुपात होगा ?
2. गौरव के विद्यालय में लगे बोर्ड की लम्बाई 360 सेमी और चौड़ाई 240 सेमी है तो बोर्ड की लम्बाई व चौड़ाई का अनुपात क्या होगा?

   दोनों ही उदाहरणों में अनुपात 3 : 2 है

सरल रूप में 30 : 20 और 360 : 240 अनुपात 3 : 2 के बराबर है, ये तुल्य अनुपात कहलाते हैं।
सरलतम अनुपात 3 : 2 के लिए आप और तुल्य अनुपात लिखिए।
आपने भिन्नों के अध्याय में तुल्य भिन्न को पढ़ा होगा।

आओ तुल्य अनुपात पर आधारित उदाहरण को समझते हैं।

उदाहरण 4 अनुपात 3 : 2 के दो तुल्य अनुपात लिखिए।

हल अनुपात $3 : 2 = \frac{3}{2} = \frac{3x2}{2x2} = \frac{6}{4}$

अतः 3 : 2 का तुल्य अनुपात 6 : 4 है।

इसी प्रकार $9 : 6 = \frac{9\div3}{6\div3} = \frac{3}{2}$

अतः 9 : 6 एक अन्य तुल्य अनुपात है।

इस प्रकार हम किसी भी अनुपात का तुल्य अनुपात अंश और हर में एक समान संख्या से गुणा या भाग द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 5 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$$\frac{12}{18} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$$

हल पहला रिक्त स्थान भरने के लिए हम 18 = 3 x 6 तथ्य का प्रयोग करेंगे। अर्थात् 18 को 6 से भाग देने पर 3 प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि दूसरे अनुपात का रिक्त स्थान प्राप्त करने के लिए 12 को 6 से भाग करना पड़ेगा।

भाग करने पर $12 \div 6 = 2$

अतः दूसरा अनुपात $\frac{2}{3}$ है।

इसी प्रकार तीसरे अनुपात के लिए दूसरे अनुपात की दोनों राशियों को 3 से गुणा करना पड़ेगा (क्यों)

अतः तीसरा अनुपात $\frac{6}{9}$ है।

इस प्रकार $\frac{12}{18} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ये सभी तुल्य अनुपात हैं।

www.rajteachers.com

करो और सीखो

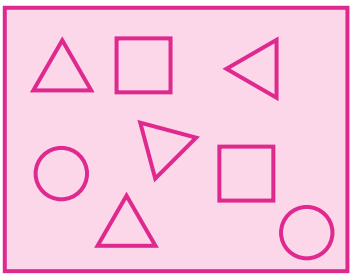
1. एक स्ट्रा (पाइप) की लम्बाई 12 सेमी है और इसका व्यास 6 मिमी है। स्ट्रा के व्यास का उसकी लम्बाई के साथ अनुपात क्या होगा?
2. आनन्द घर से स्कूल पहुँचने में 25 मिनट लेता है और अंशुल एक घण्टा लेता है तो आनन्द द्वारा लिए गए समय और अंशुल द्वारा लिए गए समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 13.1

1. एक कस्बे में ग्रीष्मकालीन अवकाश में लगने वाले अभिरूचि शिविर में 25 लड़कियाँ और 15 लड़कों ने परिंडे बाँधे, अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से,
   (ii) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से।

2. वृक्षारोपण पखवाड़े में एक कक्षा 6 के विद्यार्थियों ने 40 पौधे लगाए जिसमें 8 नीम के, 13 आम के, 19 करंजी के थे ।
   (i) नीम के पौधों व आम के पौधों की संख्या में अनुपात।
   (ii) कुल पौधों में से नीम के पौधों का अनुपात।

3. आकृति को देखकर अनुपात बताइए।



   (i) सभी त्रिभुजों की संख्या का वृत्तों की संख्या से।
   (ii) सभी वर्गों की संख्या का कुल आकृतियों से।
   (iii) सभी त्रिभुजों की संख्या का कुल आकृतियों से।

4. रिक्त स्थानों को भरिए ?

$$\frac{15}{21} = \frac{5}{\square} = \frac{\square}{14} = \frac{25}{\square}$$

5. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) 25 का 150 से
   (ii) 72 का 36 से
   (iii) 55 किमी का 121 किमी से
   (iv) 35 मिनट का 55 मिनट से

6. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) 60 पैसे तथा 3 रुपये
   (ii) 800 ग्राम तथा 5 किग्रा
   (iii) 15 मिनट तथा 1 घण्टा
   (iv) 1 लीटर तथा 750 मिली

www.rajteachers.com

7. एक गौशाला में वर्ष भर में 325000 रुपये की राशि प्राप्त हुई और वर्ष भर गौ सेवा हेतु 3,00000 रु. की राशि खर्च हुई। वर्ष भर की आय का वर्ष भर में खर्च की गई राशि से अनुपात ज्ञात कीजिए।

8. महेश प्रतिदिन 4 घण्टे स्वाध्याय करता है और लक्ष्मी प्रतिदिन 180 मिनिट स्वाध्याय करती है। बताइए कि महेश और लक्ष्मी द्वारा किए गए स्वाध्याय में लगाए समय का अनुपात क्या होगा ? (1 घण्टा = 60 मिनट)

9. एक विद्यालय में कुल 720 विद्यार्थी अध्ययन करते हैं जिसमें 360 विद्यार्थी छात्रावास में रहते हैं तो छात्रावास में रहने वाले विद्यार्थियों का कुल विद्यार्थियों के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. तलिस्मा व गुरूमित ने पापड़ उद्योग के लिए 2 : 5 में पूँजी लगाई। वर्ष के अन्त में 35,000 रुपये का मुनाफा हुआ तो प्रत्येक का हिस्सा ज्ञात कीजिए।

11. कथन को देखें– एक हॉल की चौड़ाई और लम्बाई का अनुपात 3 : 4 है। निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कि हॉल की कुछ संभव चौड़ाई और लम्बाई को दिखाती है।

हॉल की चौड़ाई (मीटर में)	6	.....	24	.....
हॉल की लम्बाई (मीटर में)	8	16	.....	.....

12. पिता की वर्तमान आयु 45 वर्ष और उसके पुत्र की 15 वर्ष है। अनुपात ज्ञात कीजिए–
(i) पिता की वर्तमान आयु और पुत्र की वर्तमान आयु का।
(ii) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पुत्र 10 वर्ष का था।
(iii) 5 वर्ष बाद की पिता की आयु का 5 वर्ष बाद की पुत्र की आयु से।
(iv) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पिता 60 वर्ष के होंगे।

13.3 समानुपात

डिन्की और प्रीति हेयर क्लिप खरीदने बाजार गई उन्होंने 30 रू में 20 हेयर क्लिप खरीदे। डिन्की ने 18 रू और प्रीति ने 12 रू दिए। अब सोचो डिन्की व प्रीति हेयर क्लिप का बँटवारा कैसे करेंगे? क्या दोनों आपस में 10–10 हेयर क्लिप बाँट ले तो बँटवारा ठीक हुआ ? तब तय हुआ कि बँटवारा दिए गए धन के अनुपात में होना चाहिए।

18 : 12 = 3 : 2 अतः क्लिप भी 3 : 2 में बँटनी चाहिए। अतः हर 5 क्लिप में 3 डिन्की और 2 प्रीति की। 20 क्लिप में से 12 डिन्की की और 8 प्रीति की।

अतः जब दो अनुपात एक समान हो तो वे समानुपात में कहलाते हैं जैसे ऊपर के उदाहरण में धन का अनुपात 18 : 12 एवं प्रत्येक को मिलने वाली हेयर क्लिप का अनुपात 12 : 8 समानुपात में हैं इन्हें आपस में (::) या (=) चिह्न का प्रयोग कर दर्शाते हैं।

www.rajteachers.com

18 : 12 :: 12 : 8 या 18 : 12 = 12 : 8

एक समान अनुपात में होने का अर्थ

(i) दिवाकर ने 15 रू के 3 पेन खरीदे और अनु ने 50 रू के 10 पेन खरीदे। किसके पेन महंगे थे ?

दिवाकर और अनु द्वारा खरीदे गए पेनों की संख्या का अनुपात = 3 : 10

उनके मूल्यों का अनुपात 15 : 50 = 3 : 10 अतः दोनों के पेनों का मूल्य समान है।

(ii) एक व्यक्ति 2 घंटे में 35 किमी चलता है। एक अन्य व्यक्ति 4 घंटे में 70 किमी चलता है तब क्या उनकी चाल समानुपातिक है ?

दोनों द्वारा चली गई दूरियों का अनुपात 35 : 70 = 1 : 2

दोनों द्वारा लिए गए समय का अनुपात 2 : 4 = 1 : 2

अतः दोनों अनुपात समान है।

अर्थात् 35 : 70 :: 2 : 4

या 35 : 70 = 2 : 4

इसे 35 अनुपात 70 बराबर 2 अनुपात 4 पढ़ते हैं।

अब एक अन्य उदाहरण लें।

(iii) 3 किग्रा सेब का मूल्य 360 रू है और 15 किग्रा तरबूज का मूल्य 90 रू है

दोनों के वजनों का अनुपात 3 : 15 = 1 : 5 है।

दोनों के मूल्यों का अनुपात 360 : 90 = 4 : 1 है।

अतः 3 : 15 और 360 : 90 समान नहीं है।

अर्थात् 3 : 15 ≠ 360 : 90

इस प्रकार चारों राशियाँ 3, 15, 360 और 90 समानुपात में नहीं है।

करो और सीखो

जाँच कीजिए निम्न राशियाँ समानुपाती हैं अथवा नहीं ?

(i) 3 : 5 और 1 : 15 (ii) 4 : 12 और 9 : 27

(iii) 10 रू का 15 रू और 4 का 6 से

उदाहरण 6 क्या अनुपात 30 सेमी : 36 सेमी और 10 मीटर : 12 मीटर समानुपात में है?

हल 30 सेमी : 36 सेमी .....

10 मीटर : 12 मीटर ....

इसलिए 30 : 36 = 10 : 12

अतः अनुपात 30 सेमी : 36 सेमी और 10 मीटर : 12 मीटर समानुपात में है

अर्थात् 30 : 36 :: 10 : 12

इसमें 30, 12 बाह्यपद है और 36, 10 मध्यपद है।

www.rajteachers.com

बाह्यपद

30:36::10:12

मध्यपद

30 x 12 = 36 x 10

360 = 360 अतः राशियाँ समानुपात में है।

यदि चार राशियाँ समानुपात में हैं तो
बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

उदाहरण 7 क्या 15 सेमी का 3 मीटर और 10 सेकण्ड का 2 मिनिट से अनुपात, एक समानुपात बनाते हैं?

हल 15 सेमी का 3 मीटर से अनुपात

= 15 : 3 x 100 (1 मीटर = 100 सेमी)

= 1 : 20

10 सेकण्ड का 2 मिनिट से अनुपात

= 10 : 2 x 60 (1 मिनिट = 60 सेकण्ड)

= 1 : 12

क्योंकि 1 : 20, 1 : 12 के बराबर नहीं है। अतः दिए हुए अनुपात समानुपात में नहीं हैं।

प्रश्नावली 13.2

1. निम्न में से कौनसी राशियाँ समानुपात में हैं, बताइए ?

(i) 8, 6, 48, 36 (ii) 12, 18, 20, 30

(iii) 14, 20, 26, 32 (iv) 26, 65, 32, 60

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन के आगे सत्य या असत्य लिखिए।

(i) 20 : 60 :: 15 : 45 (ii) 20 : 22 :: 32 : 42

(iii) 0.9 : 0.36 :: 10 : 4 (iv) 5.2 : 26 :: 1.8 : 0.9

3. क्या निम्न कथन सही है ?

(i) 30 सेकण्ड : 1 मिनिट : : 16 मी. : 32 मी.

(ii) 2.5 ली. : 5 ली. : : 25मी : 50 मी

(iii) 44 रू : 20 रू : : 66 ली. : 30 ली.

(iv) 12 मी : 15 मी : : 48 किग्रा : 64 किग्रा

www.rajteachers.com

4. जाँचिए कि क्या निम्न अनुपात समान अनुपात बनाते हैं यदि समानुपात बनता है तो मध्यपद और बाह्यपद भी लिखिए।

(i) 200 सेमी : 2.5 मी और 40 रूपये : 5 रूपये

(ii) 1 किग्रा : 250 ग्राम और 40 रूपये : 10 रूपये

(iii) 4 किग्रा : 16 किग्रा और 20 ग्राम : 400 ग्राम

(iv) 39 व्यक्ति : 65 व्यक्ति और 9 ली. : 15 ली.

13.4 ऐकिक नियम

दो सहेलियाँ नीलम और पूनम सब्जी मण्डी से सब्जी खरीदने जाती है।

नीलम ने 30 रु. में 2 किग्रा आलू खरीदे। एक किग्रा आलू का मूल्य ज्ञात कीजिए।

मोहन 4 घण्टे में 40 किमी की दूरी तय करता है। उसी समान चाल से 5 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगा ?

ये उदाहरण हमारी दैनिक जीवन की समस्याओं पर आधारित हैं। अब इन्हें कैसे हल करेंगे?

पहले उदाहरण से

2 किग्रा आलू का मूल्य = 30 रुपये

अतः 1 किग्रा आलू का मूल्य $\frac{30}{2}$ =15 रुपये

यदि आपको 5 किग्रा आलू का मूल्य ज्ञात करने के लिए कहा जाए तो यह इस प्रकार होगा = 15 x 5

= 75 रूपये

दूसरे उदाहरण से

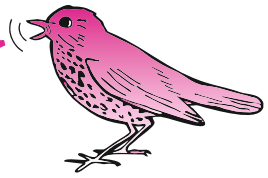
अब हम जानना चाहते हैं कि मोहन 1 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगा?

∵ 4 घण्टे चलने में दूरी तय करता है = 40 किमी

∴ 1 घण्टा चलने में दूरी तय करता है = $\frac{40}{4}$ किमी = 10 किमी

∴ 5 घण्टे चलने में दूरी तय करेगा = 10 X 5 किमी = 50 किमी

वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते हैं और फिर जितनी इकाइयों का मान निकालने को कहा जाए, निकालते हैं, यह ऐकिक नियम कहलाता है।



करो और सीखो

निम्न सारणी को पढ़कर पूरा कीजिए।

पुस्तकें	रेशमा द्वारा दिया गया मूल्य	सीमा द्वारा दिया गया मूल्य
2 पुस्तकें	50 रुपये	70 रुपये
1 पुस्तक	25 रुपये	
5 पुस्तकें		

www.rajteachers.com

उदाहरण 8 यदि 1 माला का मूल्य 7 रुपये है, तो 8 मालाओं का मूल्य कितना होगा?

हल ∵ 1 माला का मूल्य = 7 रुपये

∴ 8 मालाओं का मूल्य = 7 x 8 रूपये

इस प्रकार 8 मालाओं का मूल्य = 56 रुपये होगा।

उदाहरण 9 एक कार से 60 किमी दूरी तय करने पर 3 लीटर पेट्रोल लगता है तो 1 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय की जाएगी?

हल ∵ 3 लीटर में कार द्वारा तय की गई दूरी = 60 किमी.

∴ 1 लीटर में कार द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{60}{3}$ किमी. = 20 किमी.

∴ अतः 1 लीटर पेट्रोल में 20 किमी की दूरी तय की जा सकती है।

उदाहरण 10 एक दर्जन साबुन की टिकियों का मूल्य 174 रुपये है। 8 साबुन की टिकियों का मूल्य ज्ञात कीजिए। (1 दर्जन =12)

हल ∵ 12 साबुन की टिकियों का मूल्य = 174 रुपये

∴ 1 साबुन की टिकियों का मूल्य = $\frac{174}{12}$ रूपये = 14.50 रूपये

∴ 8 साबुन की टिकियों का मूल्य = 14.50 x 8 = 116 रूपये

इस प्रकार 8 साबुन की टिकियों का मूल्य 116 रुपये।

उदाहरण 11 यदि 10 स्काउट बैजों का मूल्य 50 रुपये हो तो 32 स्काउट बैजों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल ∵ 10 स्काउट बैजों का मूल्य = 50 रू.

∴ 1 स्काउट बैंज का मूल्य = $\frac{50}{10}$ रू. = 5 रू.

∴ 32 स्काउट बैंजों का मूल्य = 5 रू. x 32 = 160 रु

इस प्रकार 32 स्काउट बैजों का मूल्य 160 रुपये है।

उदाहरण 12 2.5 लीटर दूध का मूल्य 100 रुपये है।

(i) उसी भाव से 10 रुपये में कितना दूध आएगा?

(ii) उसी भाव से 2 लीटर दूध का मूल्य कितना होगा?

हल (i) पहली स्थिति में दूध की मात्रा अज्ञात है? मूल्य ज्ञात है। अतः इस तरह करेंगे

∵ 100 रुपये में दूध आता है = 2500 मिली

∴ 1 रुपये में दूध आता है $\frac{2500}{100}$ मिली

∴ 10 रुपये में दूध आएगा $\frac{2500}{100}$ x 10 = 250 मिली

इस प्रकार 10 रुपये में दूध आएगा 250 मिली।

(ii) दूध का मूल्य अज्ञात है और मात्रा ज्ञात है। अतः इस प्रकार आगे बढ़ेंगे।

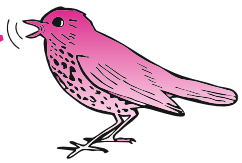
∵ 2.5 लीटर दूध का मूल्य = 100 रूपये

∴ 1 लीटर दूध का मूल्य होगा 100 ÷ 2.5 रूपये = 40 रूपये।

www.rajteachers.com

∴ 2 लीटर दूध का मूल्य होगा $40 \times 2 = 80$ रुपये।

कम होय तो भाग जाय, अधिक होय तो गुणा खाय। पूछा जाय तो अन्त में लिखा जाय।



प्रश्नावली 13.3

1. एक क्विंटल शक्कर का मूल्य 2700 रुपये है तो एक किग्रा शक्कर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

2. बस से यात्रा करने पर 200 किमी की दूरी का किराया 150 रुपये है तो 500 किमी. की यात्रा करने पर क्या किराया देना होगा?

3. यदि 700 रुपये का कुछ समय का ब्याज 168 रुपये हो तो उसी ब्याज दर एवं उतने ही समय में 1500 रुपये का ब्याज कितना होगा?

4. एक दिन में 6 बालिकाओं द्वारा 18 पौधों के चारों तरफ बाड लगाई गई तो 15 बालिकाओं द्वारा एक दिन में कितने पौधों की बाड़ लगाई जाएँगी।

5. यदि 5 व्यक्तियों के फव्वारे से नहाने के बजाय बाल्टी से नहाने पर 15 लीटर पानी की बचत होती है तो 25 व्यक्तियों द्वारा कितने लीटर पानी की बचत हो सकती है?

6. एक मोटरसाईकिल 2 लीटर में 120 किमी दूरी तय करती है। बताइए 300 किमी दूरी तय करने में कितने लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

7. एक रेलगाड़ी 130 किमी की दूरी 2 घण्टे में तय करती है। 520 किमी की दूरी तय करने में उसे कितना समय लगेगा? यदि उसकी औसत चाल समान रहे।

8. यदि 4 कुर्सियों का मूल्य 900 रुपये है तो 33750 रुपये में कितनी ऐसी ही कुर्सियाँ खरीदी जा सकती है?

9. गीता 3 महीने का मकान किराया 10500 रुपये देती है। उसे पूरे वर्ष भर का किराया कितना देना होगा? (वर्ष भर किराया समान हो)

10. रहीम ने 8 ओवर में 48 रन बनाए और कबीर ने 6 ओवर में 54 रन बनाए। बताइए कि एक ओवर में किसने

www.rajteachers.com

औसतन अधिक रन बनाए?

11. यदि 3 किग्रा बाजरे का मूल्य 49.50 रूपये है।

(i) 7 किग्रा बाजरे का मूल्य क्या होगा?

(ii) 165 रूपये में कितना बाजरा खरीदा जा सकता है?

हमने सीखा

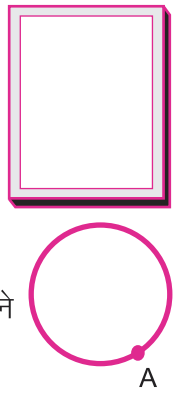
1. एक जैसी राशियों की तुलना करने के लिए सामान्यतया हम राशियों के अन्तर द्वारा तुलना विधि का प्रयोग करते हैं।
2. अधिकतर परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना अधिक अच्छी होती है अर्थात् एक राशि दूसरी राशि से कितने गुना है। इस विधि को भाग द्वारा तुलना कहते हैं।
3. अनुपात द्वारा तुलना में, दोनों राशियों की इकाइयाँ समान होनी चाहिए। यदि वे समान नहीं है तो अनुपात लेने से पहले उन्हें समान बना लेना चाहिए।
4. अलग–अलग परिस्थितियों में अनुपात समान हो सकता है।
5. अनुपात 3 : 5 और 5 : 3 एक दूसरे से भिन्न है। इस प्रकार जिस क्रम में राशियाँ ली गई है, वह महत्वपूर्ण है।
6. अनुपात को भिन्न के रुप में भी लिखा जा सकता है, जैसे $1 : 2 = \frac{1}{2}$ है।
7. दो अनुपात तुल्य होंगे, यदि उनकी संगत भिन्न भी तुल्य हो।
8. एक अनुपात को सरलतम रुप में बदला जा सकता है।
9. चार राशियाँ समानुपात में कहलाएगी, यदि पहली और दूसरी राशि में अनुपात, तीसरी और चौथी राशि में अनुपात के बराबर हो।
10. समानुपात में क्रम महत्वपूर्ण है। 3, 10, 12 और 40 समानुपात में हैं लेकिन 3, 10, 40 और 12 नहीं हैं।
11. वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते है और फिर एक से अधिक इकाइयों का मान निकालते हैं, एकिक विधि कहलाती है।

www.rajteachers.com

अध्याय 14

परिमाप एवं क्षेत्रफल

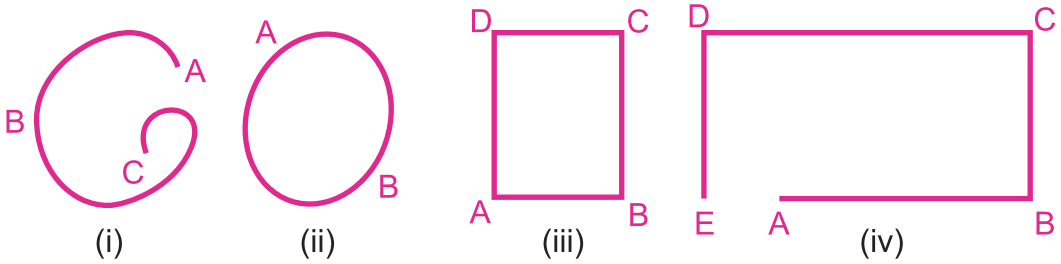
14.1 निम्न स्थितियों के बारे में सोचिए।



1. नीता को एक चित्र के चारों और रंगीन चमकीली फर्री लगानी है, तो उसे कितनी लम्बी फर्री चाहिए?
2. एक धावक वृत्ताकार मार्ग पर दौड़ रहा है। वह बिन्दु A से प्रारम्भ कर बिन्दु A पर ही आकर रुकता है, तब धावक द्वारा तय की गई दूरी कितनी होगी?
3. एक किसान अपने खेत के चारों और बाड़ लगाना चाहता है उसे कितने मीटर तार की आवश्यकता होगी?

ऐसी ही अनेक स्थितियों में हमें किसी वस्तु एवं जगहों के चारों ओर की माप जानने की जरुरत पड़ती है। ऊपर दी गई स्थितियों में बंद आकृतियों के चारों ओर की माप **परिमाप** है।
इस अध्याय में हम **परिमाप एवं क्षेत्रफल** और इनसे जुड़ी अवधारणाओं के बारे में समझेंगे।

14.2 परिमाप



आकृति 14.1

माधव तथा ईशान ने कुछ आकृतियाँ बनाई जिन्हें उपर्युक्त आकृति (i), (ii), (iii) तथा (iv) में दर्शाया गया है। माधव तथा ईशान ने देखा कि आकृति (i) एवं (iv) खुली आकृति है, जबकि (ii) तथा (iii) बंद आकृतियाँ हैं। खुली आकृतियों का परिमाप ज्ञात नहीं किया जा सकता है। अतः किसी बंद आकृति के चारों तरफ अथवा किनारे–किनारे का एक पूरा चक्कर उस आकृति का परिमाप कहलाता है।



www.rajteachers.com

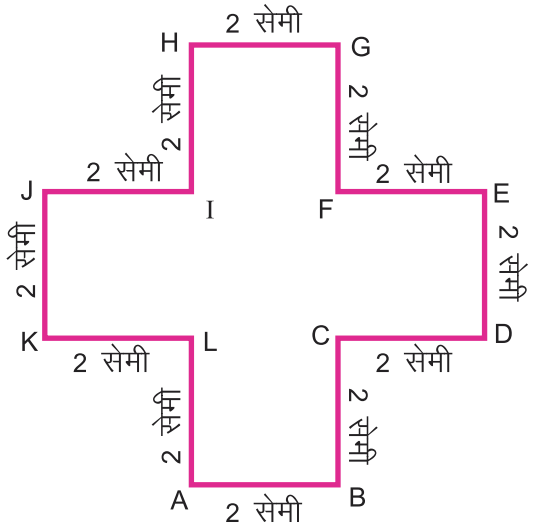
14.2.1 परिमाप मापन की इकाई

आओ नीचे दी गई समस्या को हल करने का प्रयास करते हैं–

1. अपनी–अपनी नोटबुक के पृष्ठ की लम्बाई तथा चौड़ाई को सेमी में नाप कर लिखिए। तथा चारों भुजाओं की लम्बाईयों का योगफल ज्ञात कीजिए।
2. रश्मि 120 मीटर लम्बाई तथा 80 मीटर चौड़ाई वाले बाग का पूरा चक्कर लगाने में कितनी दूरी तय कर लेगी?
3. नीचे दी गई आकृति 14.2 में रेखा खण्डों द्वारा निर्मित बंद आकृति की मापों का योगफल कर आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए।

परिमाप = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JK + KL + LA

= .....सेमी

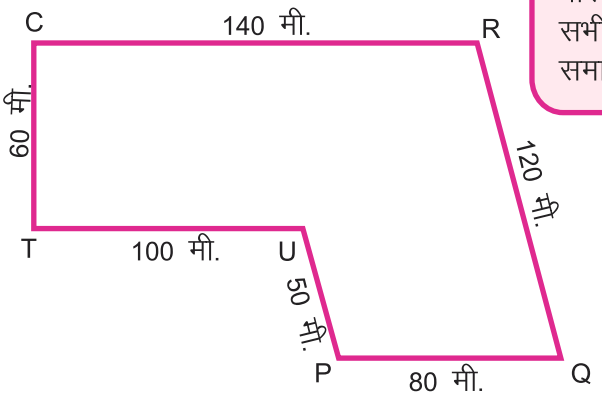


आकृति 14.2

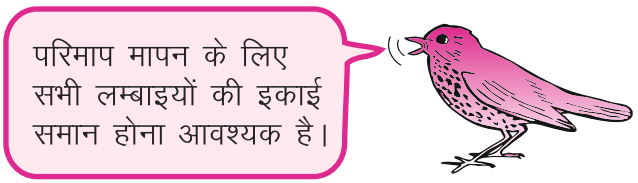
4. नीचे दी गई आकृति चित्र 14.3 का परिमाप ज्ञात कीजिए।

परिमाप = PQ + QR + RS + ST + TU + UP

= .....मीटर

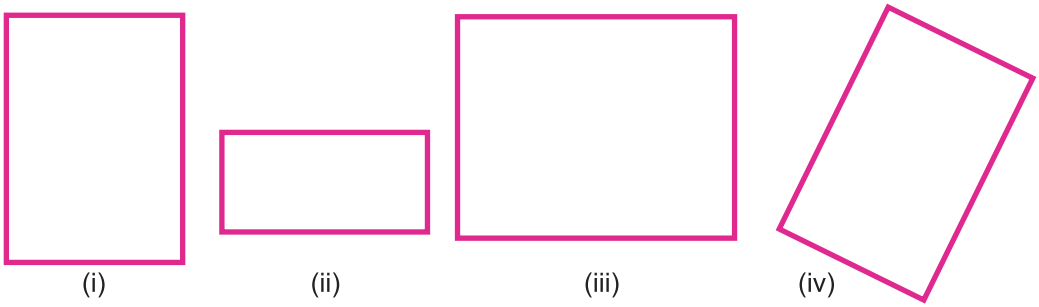


आकृति 14.3



www.rajteachers.com

14.2.2 नीचे बने आयतों में से किसका परिमाप सबसे अधिक है ? नापिए और पता लगाइए।



आकृति 14.4

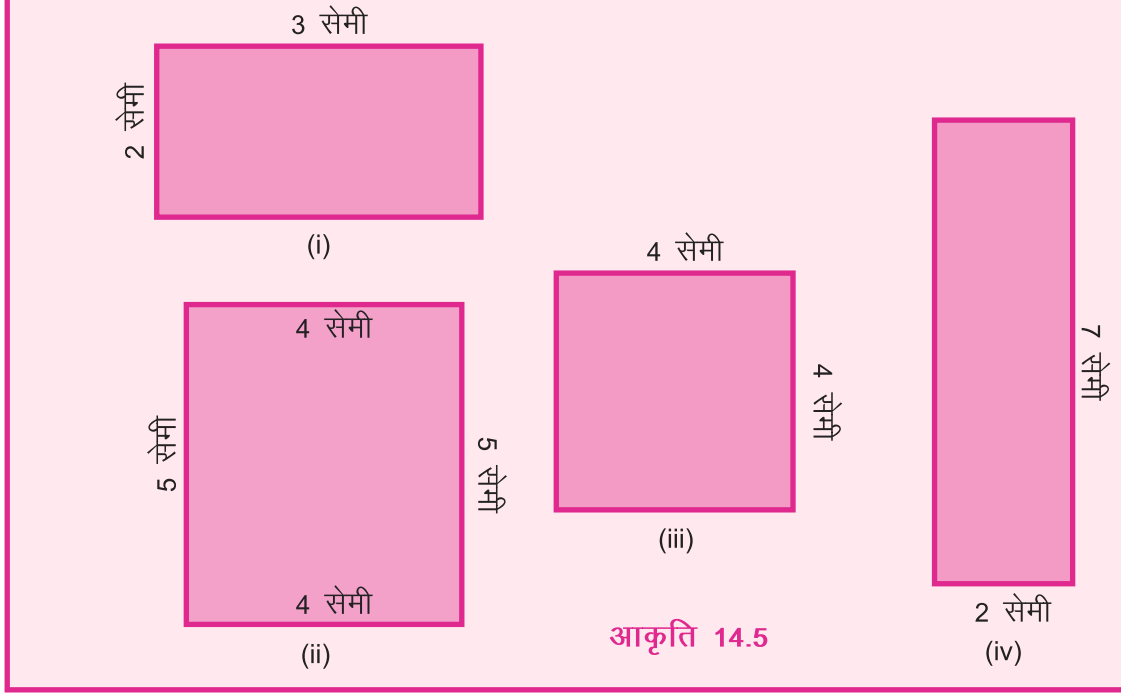
आपको पता है कि आयत के आमने–सामने की भुजाओं की लम्बाई बराबर होती है। आयत का परिमाप ज्ञात करने के लिए हम लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई करते हैं।

लम्बाई को कितनी बार जोड़ा जाता है? .....2 बार.....
चौड़ाई को कितनी बार जोड़ा जाता है? .....2 बार.....
अतः आयत का परिमाप = लम्बाई .....2..... बार + चौड़ाई .....2..... बार
= .....2..... x लम्बाई + ...2..... x चौड़ाई
= 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

करो और सीखो

नीचे बने आयतों का परिमाप ज्ञात कीजिए।



आकृति 14.5

www.rajteachers.com

उदाहरण 1 एक आयताकार दर्पण जिसकी लम्बाई 25 सेमी. तथा चौड़ाई 14 सेमी. है, का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार दर्पण की लम्बाई = 25 सेमी.

आयताकार दर्पण की चौड़ाई = 14 सेमी.

आयताकार दर्पण का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (25 सेमी.+ 14 सेमी.)

= 2 x (39 सेमी.)

= 78 सेमी.

उदाहरण 2 एक आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 250 सेमी. तथा 1 मीटर है।

हल आयत की लम्बाई = 250 सेमी.

आयत की चौड़ाई = 1 मीटर

= 100 सेमी. (1 मीटर = 100 सेमी.)

आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (250 सेमी. + 100 सेमी.)

= 2 x (350 सेमी.)

= 700 सेमी. = 7 मीटर



उदाहरण 3 एक आयताकार खेत की लम्बाई 415 मीटर तथा चौड़ाई 280 मीटर है इस खेत के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए यदि प्रति मीटर बाड़ लगाने का खर्चा 10 रुपये हो।

हल आयताकार खेत की लम्बाई = 415 मी.

आयताकार खेत की चौड़ाई = 280 मी.

बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात करने के लिए हमें खेत का परिमाप ज्ञात करना होगा।

खेत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (415 मी. + 280 मी.)

= 2 x (695 मी.)

= 1390 मीटर

1 मीटर बाड़ लगाने का व्यय = 10 रु.

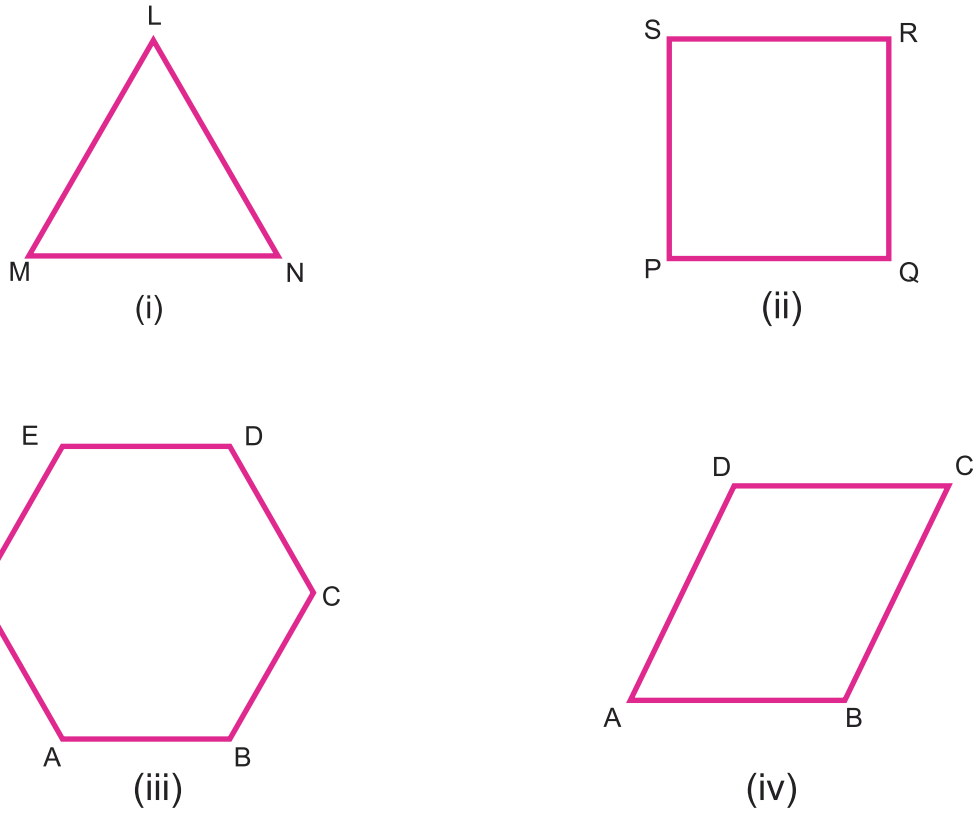
इसलिए 1390 मी बाड़ लगाने का व्यय = 10 x 1390 रुपये

= 13900 रुपये

www.rajteachers.com

14.2.3 समबहुभुजों का परिमाप

माधव और ईशान कुछ स्ट्रॉ लेकर अलग–अलग आकृतियाँ बना रहे हैं, इन्होंने कुछ इस प्रकार की आकृतियाँ बनाई।



आकृति 14.6

आप इन आकृतियों के बाह्य मापों को नाप कर दी गई तालिका में भरिए –

आकृति संख्या	भुजाओं की संख्या	एक भुजा की लम्बाई	सभी भुजाओं की लम्बाईयों का योग	भुजाओं की संख्या एक भुजा की लम्बाई
(i)				
(ii)				
(iii)				
(iv)				

तालिका 14.1

www.rajteachers.com

तालिका 14.1 में आप देखेंगे कि प्रत्येक आकृति में भुजाओं की लम्बाइयों का योग उस आकृति में भुजाओं की संख्या तथा एक भुजा की नाप के गुणनफल के बराबर होता है।

अतः समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या x एक भुजा की लम्बाई

चूँकि वर्ग भी एक समबहुभुज है अतः

वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा

उदाहरण 4 ज्योति 90 मीटर भुजा वाले वर्गाकार बाग के चारों तरफ 2 चक्कर लगाती है। ज्योति द्वारा तय की गई दूरी बताइए।

हल वर्गाकार बगीचे का परिमाप = 4 x भुजा की लम्बाई

= 4 x 90 मीटर

= 360 मीटर

ज्योति द्वारा 2 चक्कर में तय की गई दूरी = 2 x 360 मीटर

= 720 मीटर

उदाहरण 5 एक वर्ग का परिमाप 18 सेमी है तो उस वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल वर्ग का परिमाप = 18 सेमी.

हम जानते हैं कि वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा

अतः 18 सेमी = 4 x भुजा

$$\text{इसलिए भुजा} = \frac{18 \text{ सेमी.}}{4}$$

= 4.5 सेमी.

उदाहरण 6 एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8.5 सेमी है।

हल चूंकि समबाहु त्रिभुज में 3 समान भुजाएँ होती हैं इसलिए

समबाहु त्रिभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या x एक भुजा की माप

= 3 x 8.5 सेमी.

= 25.5 सेमी.

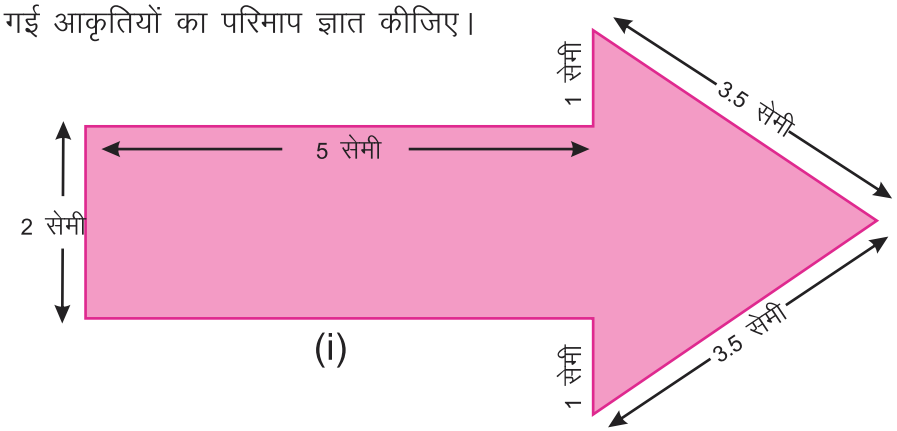
करो और सीखो

1. एक सम बहुभुज में प्रत्येक भुजा की लम्बाई 3.5 सेमी तथा भुजाओं की संख्या तीन है, बहुभुज का परिमाप बताइए।
2. एक सम बहुभुज का परिमाप 28 सेमी, प्रत्येक भुजा की नाप 7 सेमी हो तो सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए?
3. एक वर्ग की प्रत्येक भुजा 4.5 सेमी है, तो उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

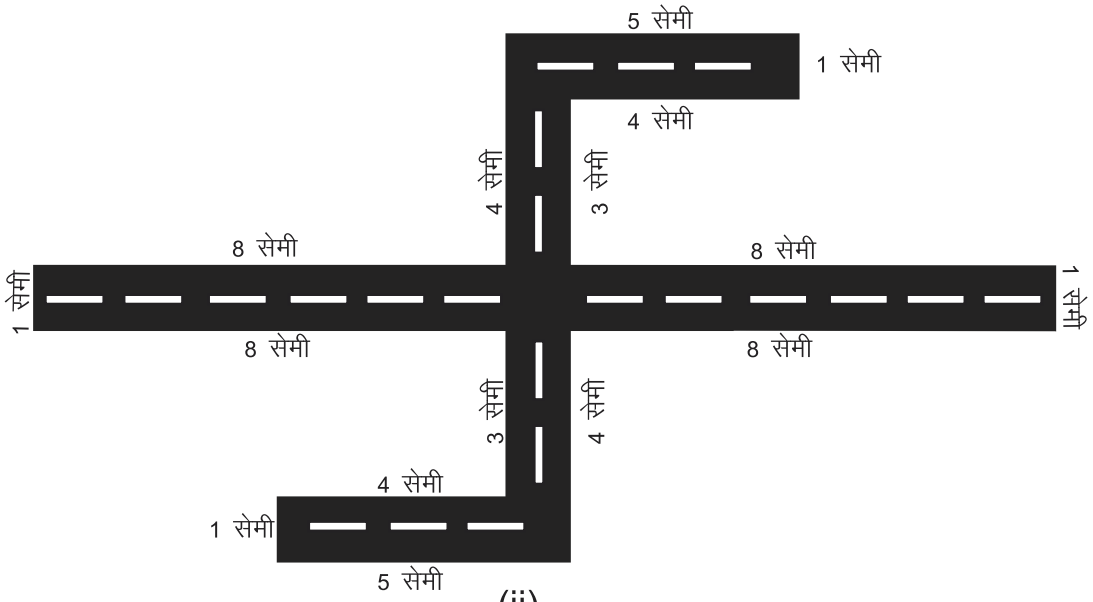
www.rajteachers.com

प्रश्नावली 14.1

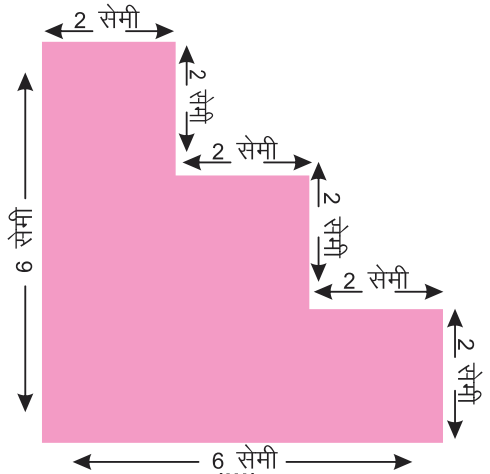
1. नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)



(iii)



www.rajteachers.com

2. एक समपंचभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 4 सेमी है?

3. एक धागे का टुकड़ा 36 सेमी लम्बाई का है। प्रत्येक भुजा की लम्बाई क्या होगी, यदि धागे से बनाया जाता है।

(i) एक वर्ग (ii) एक समबाहु त्रिभुज (iii) एक समषट्भुज

4. गीता 50 मीटर भुजा वाले वर्गाकार खेत के चारों और दौड़ती है और पूजा 65 मीटर लम्बाई और 25 मीटर चौड़ाई वाले आयताकार खेत के चारों और दौड़ती है। इनमें से कौन कम दूरी तय करती है?

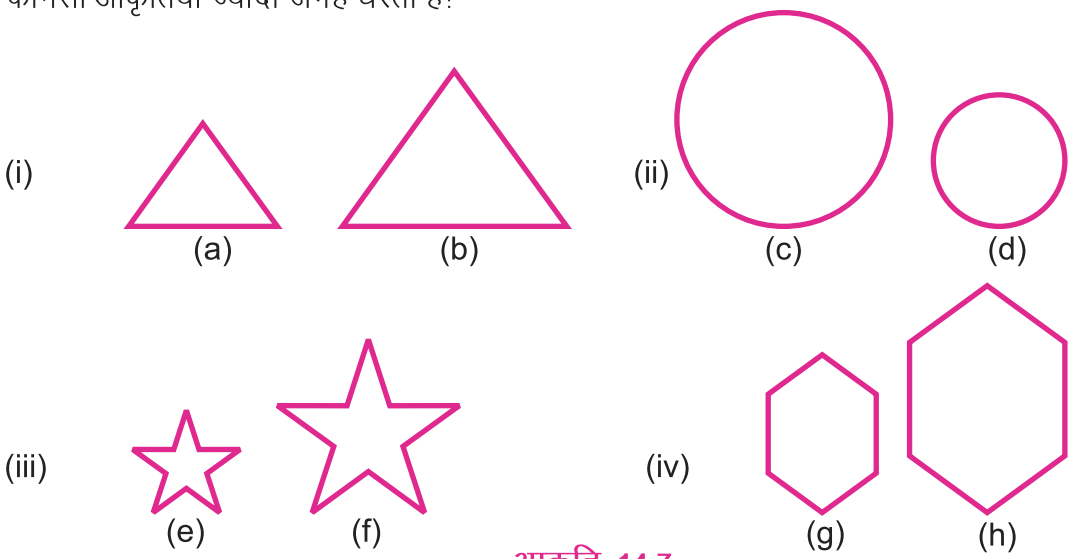
5. एक समपंचभुज का परिमाप 30 सेमी है, इसकी एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए?

6. माधू के खेत की लम्बाई 23.5 मीटर और चौड़ाई 15.5 मीटर है। खेत के चारों तरफ तारबंदी के लिए कितने लम्बे तार की आवश्यकता होगी? ज्ञात कीजिए।

7. फुटबॉल के मैदान का परिमाप 270 मीटर है। यदि इस मैदान की लम्बाई 90 मीटर है तो मैदान की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

14.3 क्षेत्रफल

नीचे दी गई सभी बंद आकृतियाँ तल में कुछ क्षेत्र को घेरती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौनसी आकृतियाँ ज्यादा जगह घेरती हैं?



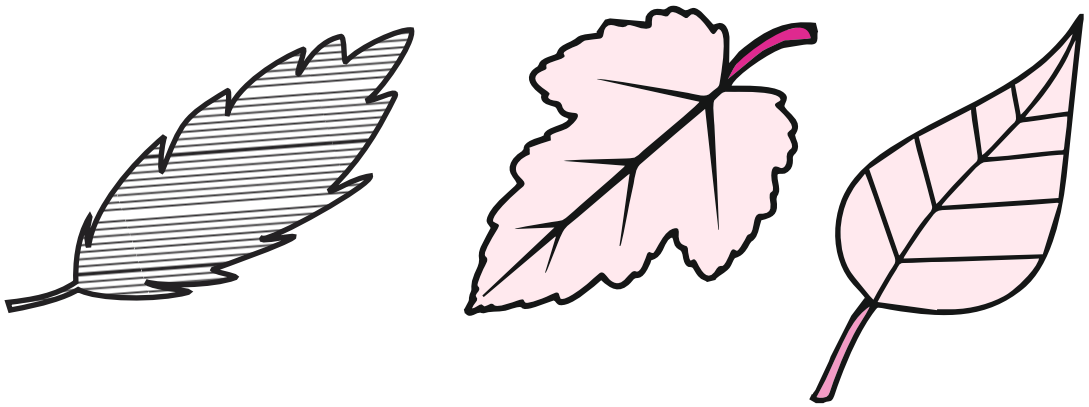
आकृति 14.7

कुसुम – जो आकृति छोटी हैं वह कम जगह घेरती है तथा बड़ी आकार वाली आकृति ज्यादा जगह घेरती है।

बंद आकृतियों द्वारा घेरा गया क्षेत्र, क्षेत्रफल कहलाता है।

www.rajteachers.com

शिक्षक– क्या नीचे दी गई आकृतियों को देखने से पता लगता है कि इनमें से किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है?

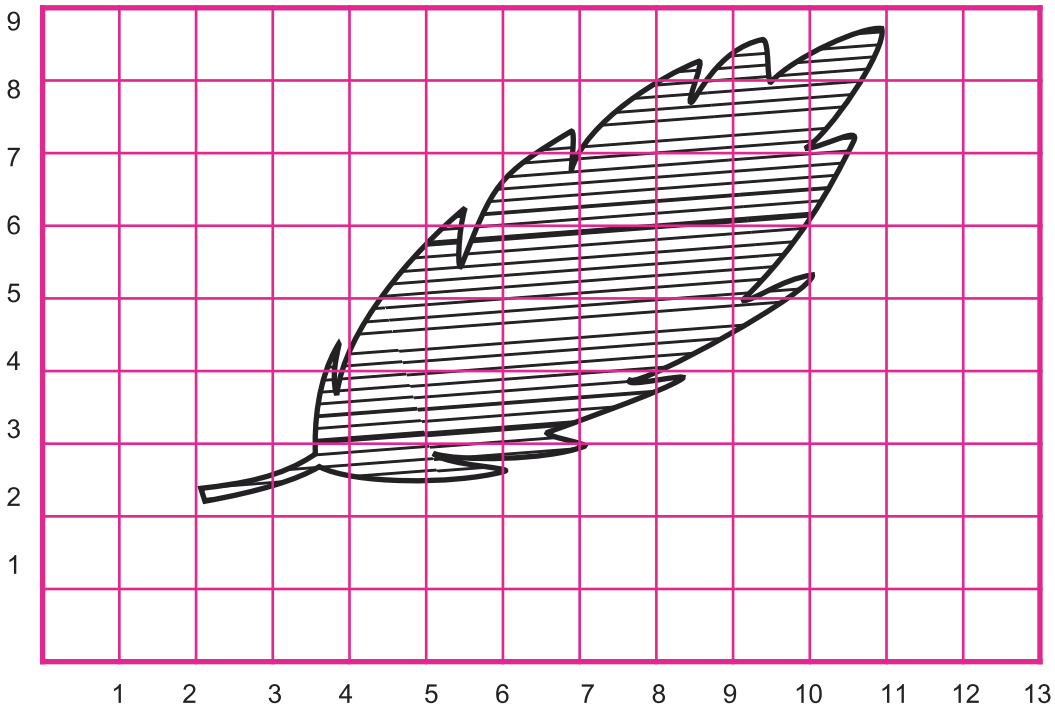


आकृति 14.8

सभी बच्चे चुप रहते हैं।

नरेश– ये देखने मात्र से बता पाना सम्भव नहीं हो रहा।

शिक्षक– आओ इस पत्ती को हम गणित की कॉपी के चौखाने वाले पेज के ऊपर रख कर इसका अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।



आकृति 14.9

www.rajteachers.com

चौखाने को वर्ग भी कहते हैं। हम आधे से अधिक घेरे गए वर्ग को पूरा वर्ग गिनते है तथा आधे से कम घेरे गए वर्गों को छोड़ देते हैं। वर्ग का आधा घेरा गया भाग आधा वर्ग इकाई गिना जाता है।



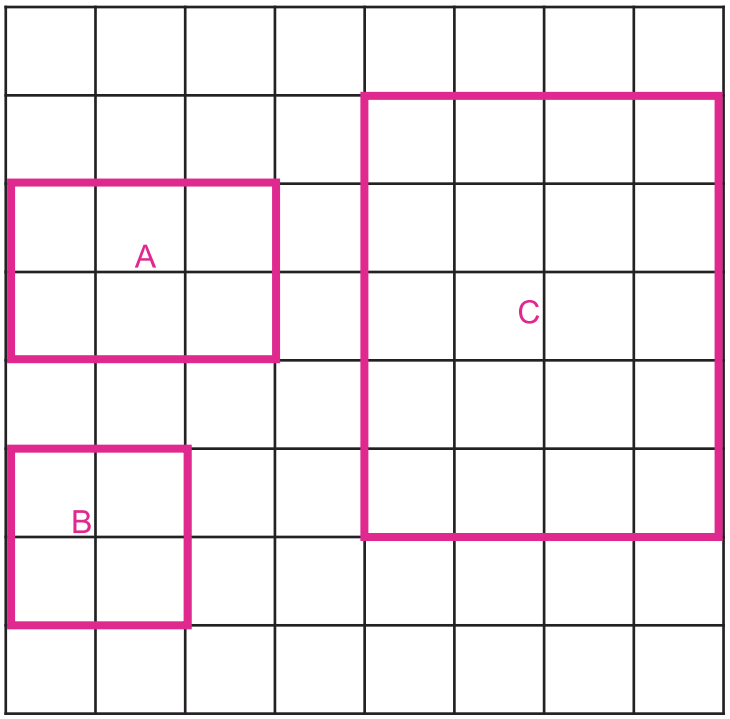
पूरे घेरे गए वर्गों की संख्या = 10
आधे से ज्यादा घेरे गए वर्गों की संख्या = 14
आधे से कम घेरे गए वर्गों की संख्या = 06
यदि आधे से कम जगह घेरे गए वर्गों की संख्या को छोड़ दें तथा आधे से ज्यादा जगह घेरे गए वर्गों की संख्या को पूर्ण मान लें तो इस पत्ती का
अनुमानित (लगभग) क्षेत्रफल = 10+14
= 24 वर्ग

करो और सीखो

गुड़हल के पत्ते को एवं पीपल के पत्ते को ग्रिड पेपर पर रख कर दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात करके तुलना करो और बताओ किसका क्षेत्रफल ज्यादा है?

14.4 आयत का क्षेत्रफल

एक ग्रिड पेपर जिसका प्रत्येक वर्गाकार खाना 1 सेमी X 1 सेमी है। इनमें तीन आयत A, B व C बने हैं। इनके आकृति को देख कर नीचे दी गई तालिका को भरिए।



आकृति 14.10

www.rajteachers.com

आप और भी आयत ग्रिड पेपर पर बना कर तालिका में भरिए।

आयत	लम्बाई	चौड़ाई	आयतों द्वारा घेरे गए इकाई वर्गों की संख्या	लम्बाई x चौड़ाई
A	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
B	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
C	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
D	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....

तालिका 14.2

तालिका 14. 2 में आप देखेंगे कि आयतों द्वारा घेरे गए वर्गों की संख्या उन आयतों की लम्बाई और चौड़ाई के गुणनफल के बराबर है।

अतः आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

14.5 वर्ग का क्षेत्रफल

हम जानते हैं कि किसी आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई समान होने पर वह वर्ग बन जाता है। आप सोचिए वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा?

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

14.6 क्षेत्रफल की इकाई

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए दो समान इकाइयों का गुणा किया जाता है तथा इसकी इकाई वर्ग इकाई के रूप में लिखी जाती है।

जैसे :– सेमी x सेमी = वर्ग सेमी (सेमी ^{2})

मीटर x मीटर = वर्गमीटर (मी ^{2})

उदाहरण 7 एक आयताकार मोबाइल की सतह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 14 सेमी तथा चौड़ाई 7 सेमी है।

हल

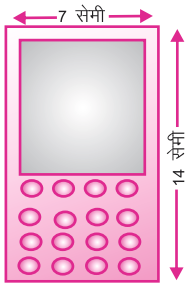
मोबाइल की लम्बाई = 14 सेमी

मोबाइल की चौड़ाई = 7 सेमी

मोबाइल का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

= 14सेमी x 7 सेमी

= 98 वर्ग सेमी



www.rajteachers.com

उदाहरण 8 एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा की लम्बाई 15 मीटर है।

हल वर्गाकार मैदान की एक भुजा की लम्बाई = 15 मी.

मैदान का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 15 मी. x 15 मी.

= 225 वर्ग मीटर

उदाहरण 9 2.50 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाले एक आयताकार गत्ते की लम्बाई 2 मीटर है, इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल = 2.50 वर्गमीटर

गत्ते की लम्बाई = 2 मीटर

हम जानते हैं कि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

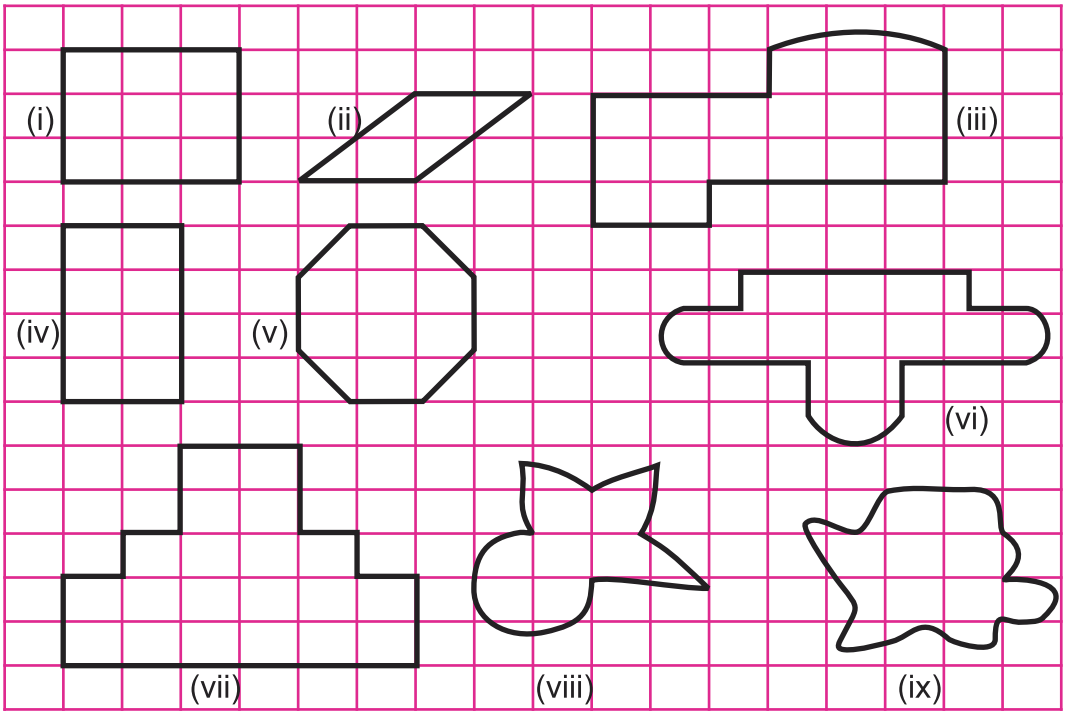
$$\text{गत्ते की चौड़ाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}} = \frac{2.50 \text{ वर्ग मीटर}}{2 \text{ मीटर}}$$

= 1.25 मीटर

प्रश्नावली 14.2

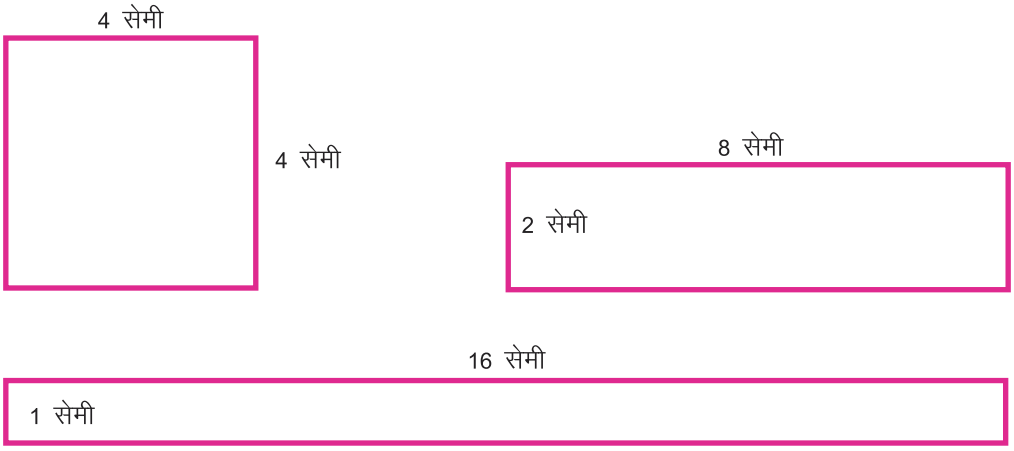
1. निम्नांकित आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

एक वर्गाकार खाना = 1 सेमी. x 1 सेमी.

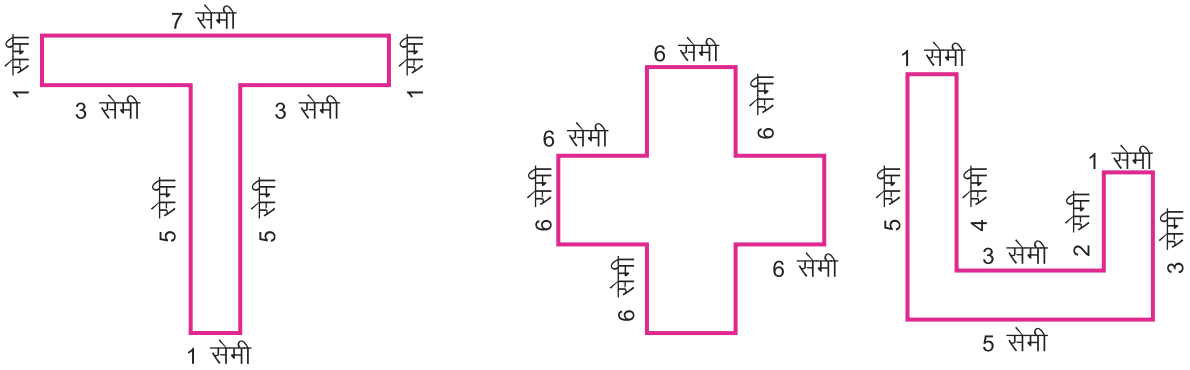


www.rajteachers.com

2. प्रत्येक आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप उत्तर से क्या निष्कर्ष निकाल सकते है ?



3. निम्नांकित आकृतियों को आयतों में बदलते हुए प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



4. एक कमरे की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 10 मीटर व 8 मीटर है। उसके फर्श को ढकने के लिए कितने वर्ग मीटर कालीन की आवश्यकता होगी ? ज्ञात कीजिए।

5. एक वर्गाकार फ्रेम का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा की लम्बाई 9 सेमी है।

6. दिए गए आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए एवं बताइए इनमें से किसका क्षेत्रफल सबसे अधिक तथा किसका सबसे कम है?

(i) ल. = 2 मीटर, चौ. = 80 सेमी

(ii) ल. = 180 सेमी, चौ. = 70 सेमी

(iii) ल. = 200 सेमी, चौ. = 1 मीटर

(iv) ल. = 190 सेमी, चौ. = 1 मीटर

www.rajteachers.com

7. 50 मीटर लम्बाई वाले एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल 300 वर्गमीटर है, तो बगीचे की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

8. एक खेत की लम्बाई 8 मी तथा चौड़ाई 6 मी है। इसमें 1 मीटर भुजा वाली 6 वर्गाकार क्यारियाँ बनी है। खेत की शेषभूमि का क्षेत्रफल क्या होगा ?

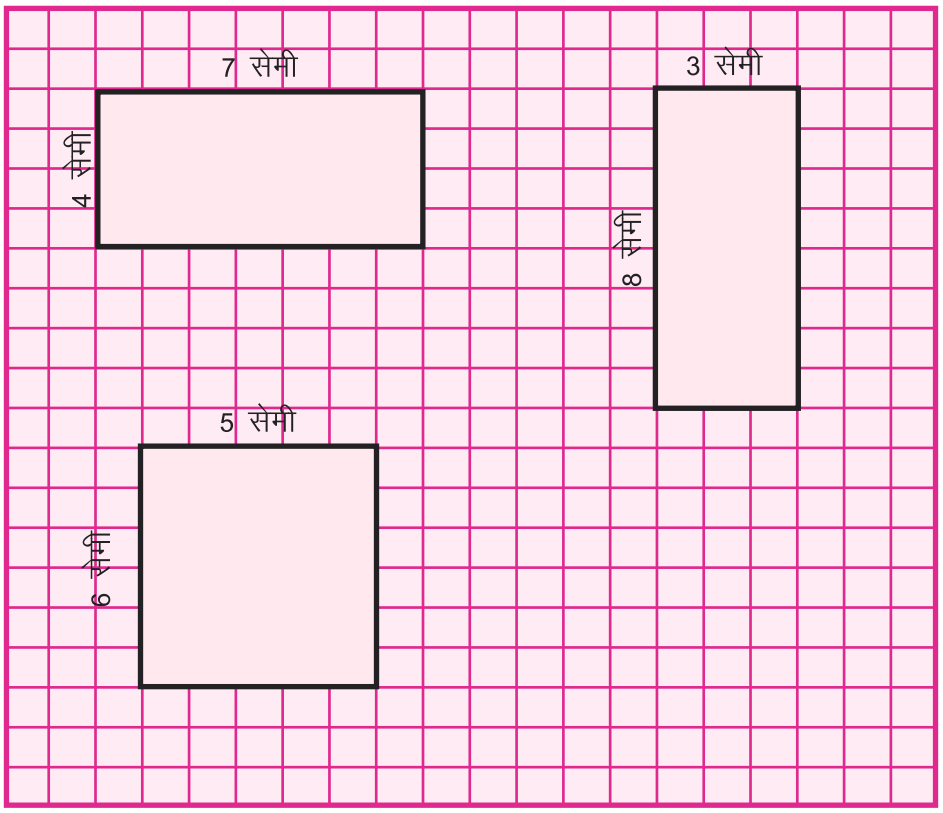
9. आयत के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होगा यदि –
   (i) उसकी लम्बाई और चौड़ाई को दो गुना कर दिया जाए?
   (ii) उसकी लम्बाई को तिगुनी और चौड़ाई को चौगुना कर दिया जाए?

10. एक वर्ग के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होगा यदि उसकी भुजा को–
   (i) आधी कर दें?
   (ii) दुगुनी कर दें?

14.7 आयत के परिमाप एवं क्षेत्रफल में सम्बन्ध

1. परिमाप समान होने पर

एक ग्रिड पेपर लीजिए जिसका प्रत्येक वर्गाकार खाना 1 सेमी X 1 सेमी का हो 1 सेमी माप के 22 पतले तार के टुकड़े लीजिए जिनसे अलग–अलग नाप के आयत बनाने का प्रयास कीजिए जिनका परिमाप 22 सेमी हो।



आकृति 14.11

www.rajteachers.com

निम्नलिखित तालिका को भरिए तथा प्रत्येक आकृति में बनने वाले कुल वर्गाकार खाने गिन कर तालिका में भरिए।

लम्बाई	चौड़ाई	लम्बाई x चौड़ाई	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....

तालिका 14.3

इसी परिमाप के अन्य आयत ग्रिड पेपर पर बना कर तालिका में भरिए। तालिका 14.3 से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

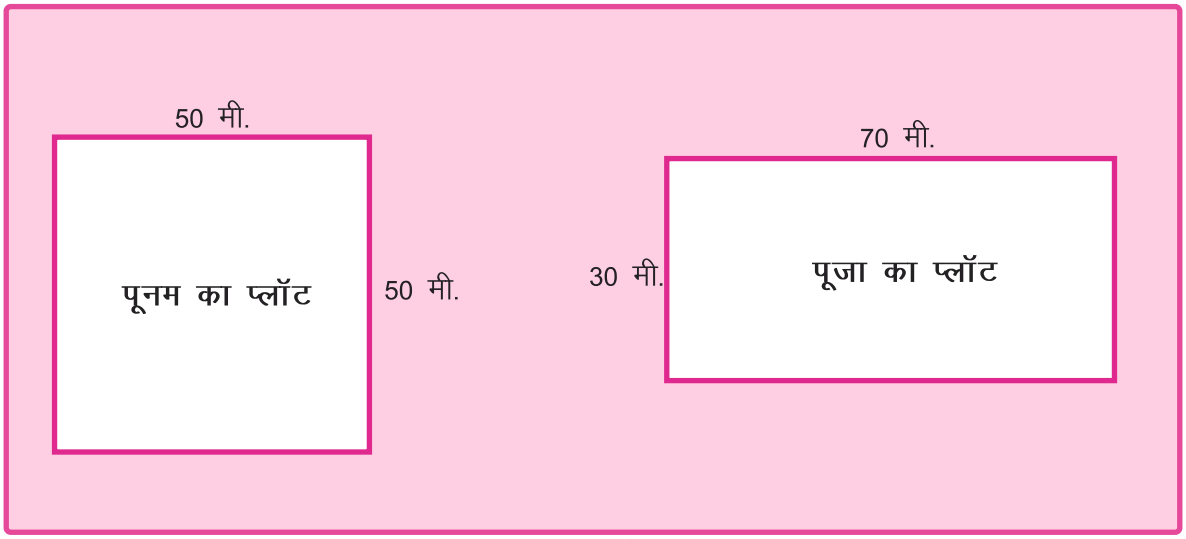
1. समान परिमाप वाले आयतों का क्षेत्रफल सदैव समान नहीं होता है।
2. समान परिमाप होने पर उस आयत का क्षेत्रफल सर्वाधिक होता है जिसकी लम्बाई व चौड़ाई में अंतर न्यूनतम हो।

2. क्षेत्रफल समान होने पर

24 खानों वाले अलग–अलग आयत बना कर तालिका 14.3 की तरह लम्बाई व चौड़ाई के मान को भर कर तालिका के आधार पर अन्य निष्कर्ष निकालिए।

14.8 समान परिमाप के वर्ग एवं आयत के क्षेत्रफल की तुलना

नीचे पूनम तथा पूजा के प्लॉट के चित्र दिए हैं बताइए किसके प्लॉट का क्षेत्रफल अधिक है?



आकृति 14.12

www.rajteachers.com

पूनम के प्लॉट का क्षेत्रफल = ... वर्ग मीटर
पूजा के प्लॉट का क्षेत्रफल = ... वर्ग मीटर

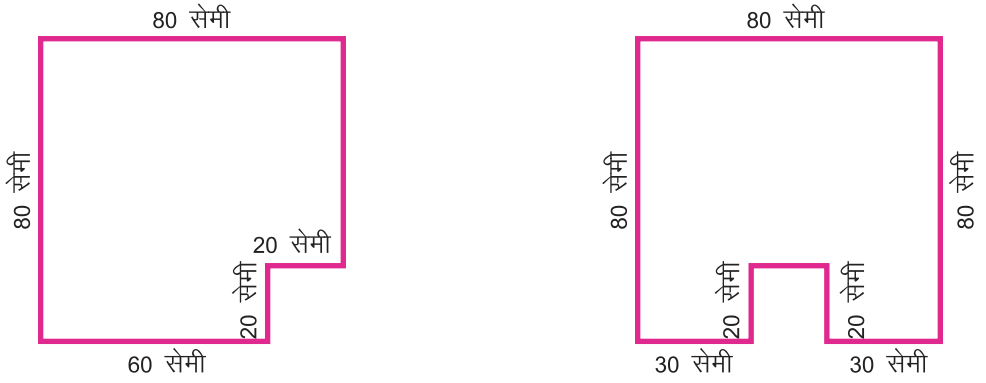
समान परिमाप के वर्ग एवं आयत में वर्गाकार आकृति का क्षेत्रफल अधिक होता है।

14.9 आकृति का भाग कम करने से परिमाप में बदलाव

80 सेमी X 80 सेमी नाप के वर्गाकार कपड़े में से एक 20 सेमी X 20 सेमी नाप का वर्गाकार रुमाल काटकर अलग किया गया वर्गाकार कपड़े के परिमाप में क्या बदलाव आएगा?

(i) जब रुमाल किसी एक कोने से लिया जाए– चित्र (i)

(ii) जब रुमाल किसी एक भुजा (किनारे) के मध्य से लिया जाए– चित्र (ii)



आकृति 14.13

- किसी आकृति में से समान क्षेत्रफल वाला भाग हटाने पर उस आकृति के परिमाप में बदलाव सदैव समान नहीं रहता है।

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नांकित आयताकार क्षेत्रों में बताइए किन आकृतियों का परिमाप समान तथा क्षेत्रफल भिन्न है?

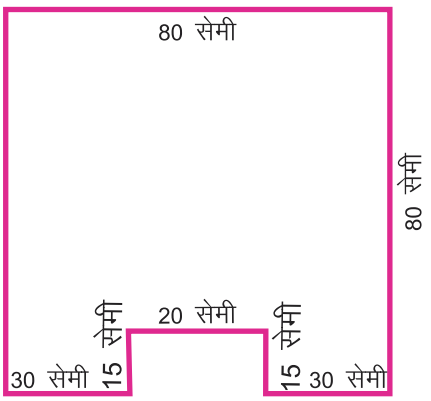


2. गोपी का खेत वर्गाकार है जिसकी भुजा 75 मीटर है। नारायण का खेत आयताकार है जिसकी लम्बाई 85 मीटर है। किसके खेत का क्षेत्रफल अधिक होगा एवं कितना? ज्ञात कीजिए। जबकि दोनों के खेत का परिमाप समान है।

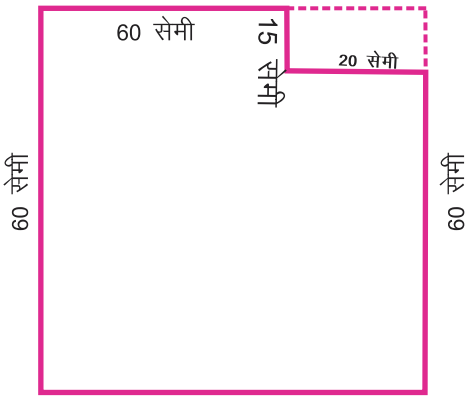
3. एक वर्ग का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी है। एक आयत का परिमाप इस वर्ग के परिमाप के समान है। अगर आयत की चौड़ाई 6.5 सेमी हो तो लम्बाई कितनी होगी? ज्ञात कीजिए किसका क्षेत्रफल अधिक है?

4. एक 20 सेमी x 15 सेमी माप वाला आयताकार टुकड़ा आकृति के अनुसार अलग–अलग स्थानों से काट कर वर्ग के परिमाप में आए बदलाव को बताइए।

www.rajteachers.com



(i)



(ii)

5. 1 सेमी X 1 सेमी खानों वाले वर्गाकार पेपर पर कितने आयत अलग–अलग लम्बाई तथा चौड़ाई के बना सकते हैं जिससे कि प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी हो जाए। (केवल पूर्ण संख्या की नापों पर विचार करते हुए बनाइए)
   (i) किस आयत का परिमाप सबसे अधिक है? (ii) किस आयत का परिमाप सबसे कम है?
   (iii) यहाँ जैसे–जैसे परिमाप घटता है, आयत की चौड़ाई बढ़ती है अथवा घटती है?
6. 1 सेमी X 1 सेमी खानों वाले वर्गाकार पेपर पर कितने अलग–अलग लम्बाई तथा चौड़ाई के आयत बना सकते हैं जिससे कि प्रत्येक आयत का परिमाप 16 वर्ग सेमी हो जाए। (केवल पूर्ण संख्या की नापों पर ही विचार करते हुए बनाइए)
   (i) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है? (ii) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है?
   (iii) यहाँ जैसे–जैसे क्षेत्रफल बढ़ता है, आयत की लम्बाई बढ़ती है अथवा घटती है?

हमने सीखा

1. परिमाप एक ऐसी दूरी है जो रेखा खंडों के साथ–साथ चलते हुए एक बंद आकृति के चारों ओर एक पूरा चक्कर लगाने में तय होती है।
2. (i) आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई) (ii) वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा की लम्बाई
   (iii) समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 x भुजा की लम्बाई
   (iv) समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या x भुजा की लम्बाई
3. बंद आकृतियों द्वारा घेरे गए तल को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।
4. वर्गाकार पेपर का प्रयोग करके किसी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित परिपाटी को अपनाया जाता है–
   (i) जिन वर्गों का आधे से कम भाग आकृति से घिरा है, उन्हें छोड़ देते है।
   (ii) यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग आकृति से घिरा है, तो ऐसे वर्गों को हम एक पूरा वर्ग ही गिनते हैं।
   (iii) यदि किसी वर्ग का आधा भाग आकृति से घिरा हो तो उसके क्षेत्रफल को आधा वर्ग इकाई लेते हैं।
5. (i) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई (ii) वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

www.rajteachers.com

अध्याय 15

आँकड़ों का प्रबंधन

15.1 आँकड़ों का खेल अध्याय को आपने कक्षा पाँच में पढ़ा था। जिसमें आँकड़ों के गणना चिह्न, चित्रों द्वारा प्रदर्शन एवं दंड आलेख का अध्ययन भी किया था। इस अध्याय में हम इनके बारे में कुछ और अधिक जानने का प्रयास करेंगे।

आप एक सिक्का लें उसे 20 बार उछालें एवं उस से प्राप्त चित व पट को अपनी कॉपी में लिखें। किशन अपनी कॉपी में इस प्रकार लिखता हैं।

T T H H T T T H T H H T T H T H H H T T

ये सभी आँकड़े हैं जो किशन के 20 बार सिक्के को उछालने पर प्राप्त हुए हैं।
आपकी कक्षा के दोस्तों की उम्र का पता कर लिखिए।

.....

क्या ये भी आँकड़े हैं?

जानकी की पसंद की मिठाई जलेबी है।
क्या यह भी आँकड़े हैं?

नहीं, यह आँकड़े नहीं हैं क्योंकि यहाँ केवल जानकी की पसंद को ही पूछा गया था।
यदि किसी समूह की पसंदीदा मिठाई के बारे में पूछा जाता तो क्या वह आँकड़े होते?
निम्नलिखित में बताइए कौन–कौन से आँकड़े हैं एवं कौन–कौन से आँकड़े नहीं हैं ?

क्र.सं.	कथन	आँकड़े हैं / नहीं हैं
1.	आपकी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या	आँकड़े नहीं हैं
2.	कक्षा 6 से 12 तक के पैदल आने वाले विद्यार्थियों की कक्षावार संख्या	
3.	आपके गाँव में विद्यालयों की संख्या	
4.	आपके घर पर पशुओं की संख्या	
5.	आपके परिवार के सदस्यों का वजन	
6.	आपके गाँव में पक्के व कच्चे मकानों की संख्या	
7.	आपके कक्षाध्यापक की आयु	

ऐसे और भी कथन बनाएँ तथा खुद तय करें कि ये आँकड़े हैं या नहीं।

(इस अध्याय में दिए गए उदाहरण एवं सवाल अध्यापक एवं विद्यार्थियों के लिए आधार मात्र है। कक्षा को जीवंत बनाने के लिए उदाहरण एवं सवाल स्थानीय परिस्थिति के लिए बनाइए।)

www.rajteachers.com

15.2 आँकड़ों के प्रकार

शबनम और सुशील क्रमशः छात्र पंचायत के अध्यक्ष व प्रधानमंत्री हैं। छात्र पंचायत की योजना बनाते समय उन्हें आज कक्षावार उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या की जरूरत थी। शबनम हर कक्षा में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या लेने गई, कुछ समय बाद सुशील को अचानक ध्यान आया कि यह जानकारी तो प्रधानाचार्य कक्ष में से ली जा सकती है। वह भी वहाँ से ले आया, दोनों द्वारा लाए गए आँकड़े समान थे। यहाँ शबनम ने उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या स्वयं एकत्रित की थी। अतः ये शबनम के लिए प्राथमिक आँकड़े कहलाएँगे। जबकि सुशील ने ये जानकारी प्रधानाचार्य कक्ष से ली थी उनके लिए आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाएँगे। सरकार द्वारा निर्धारित सरकारी प्रतिनिधि घर–घर जाकर जनसंख्या के आँकड़ों को इकट्ठा (एकत्रित) करते हैं, सरकार के लिए यह प्राथमिक आँकड़े हैं जबकि जनसंख्या के उन्हीं आँकड़ों का उपयोग अन्य संस्थाएँ करती हैं तो उनके लिए यह द्वितीयक आँकड़े हैं।

आप अपने विद्यालय के समस्त अध्यापकों के निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित कीजिए–

. अध्यापक का नाम : .....
पद : .....
शैक्षिक योग्यता : .....
विषय जो पढ़ाते हैं : .....
अध्यापन का अनुभव : .....
उम्र : .....

इस गतिविधि में जो जानकारी आप द्वारा एकत्रित की जा रही है प्राथमिक आँकड़े हैं।
क्या आप इन्हें सारणीबद्ध कर सकते हैं?
कक्षा छठी के छात्र उपस्थिति रजिस्टर के छात्र विवरण पृष्ठ से छात्रों की जो जानकारी उपलब्ध होती है वह आप विद्यार्थियों के लिए द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं।

15.3 आँकड़ों को व्यवस्थित करना

15.3.1

वार्षिकोत्सव पर विद्यालय के विद्यार्थियों को पसंद की मिठाई वितरित करनी थी। पसंदीदा मिठाई के बारे में जानकारी ली गई।

जलेबी को J, लड्डू को L, बरफी को B, और गुलाबजामुन को G से दिखाया गया तो वह इस प्रकार है–

G, J, J, L, J, G, B, B, J, L, J, B, B, L, J, B, J, G, G, B

शशि का तरीका इस प्रकार था–

J - 7 L - 3 B - 6 G - 4

www.rajteachers.com

विकास का तरीका इस प्रकार था–

मिठाई का नाम		पसंद करने वालों की संख्या
जलेबी	(J)	✓✓✓✓✓✓✓
लड्डू	(L)	✓✓✓
बरफी	(B)	✓✓✓✓✓✓
गुलाबजामुन	(G)	✓✓✓✓

रोहित ने इस प्रकार किया–

मिठाई का नाम		मिलान चिह्न	पंसद करने वालों की संख्या
जलेबी	(J)	|| || || |	7
लड्डू	(L)	|| |	3
बरफी	(B)	|| || ||	6
गुलाबजामुन	(G)	|| ||	4

राजुल का तरीका इस प्रकार था–

मिठाई का नाम		मिलान चिन्ह	पंसद करने वालों की संख्या
जलेबी	(J)	𝍸 ||	7
लड्डू	(L)	|||	3
बरफी	(B)	𝍸 |	6
गुलाबजामुन	(G)	||||	4

यहाँ हमने चार तरीकों से देखा और उसमें यह तय किया गया कि राजुल का तरीका ठीक है क्योंकि राजुल ने गणना चिह्न को पाँच के बंडल के रूप में लिखा था जो गिनने में भी आसान था।

15.3.2 करीना ने पासा लेकर उसे 30 बार उछाला और नीचे दिखाए अनुसार अपने आँकड़े लिखे।

3, 6, 5, 4, 4, 3, 6, 5, 3, 6, 2, 3, 1, 6, 4, 1, 3, 6,
1, 1, 2, 4, 4, 3, 3, 4, 2, 1, 2, 1

www.rajteachers.com

करीना निम्नलिखित सूचना जानना चाहती थी

1. पासे की उछाल पर सबसे अधिक बार आने वाला अंक
2. पासे की उछाल पर सबसे कम बार आने वाला अंक
3. पासे की उछाल पर सम अंक और विषम अंक आने की बारम्बारताओं में अन्तर

करीना ने मिलान चिह्न का प्रयोग करते हुए सारणी तैयार की–

पासे के अंक	मिलान चिह्न	बारम्बारता
1	𝍸 I	6
2	IIII	4
3	𝍸 II	7
4	𝍸 I	6
5	II	2
6	𝍸	5

अब पूछे गए प्रश्नों का उत्तर सरलता से दिया जा सकता है। इस प्रकार के क्रियाकलाप आप अपनी कक्षा में भी कीजिए।

15.4 चित्रालेख

कक्षा की पाँच पंक्तियों में विद्यार्थी इस प्रकार बैठे थे–

	☺ = 1 विद्यार्थी
पंक्ति 1	☺ ☺ ☺ ☺
पंक्ति 2	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
पंक्ति 3	☺ ☺ ☺
पंक्ति 4	☺ ☺ ☺ ☺
पंक्ति 5	☺ ☺

(i) किस पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक है?

(ii) किस पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या सबसे कम है?

(iii) किन–किन पंक्तियों में विद्यार्थियों की संख्या समान है?

आप उपर्युक्त आलेख को देख कर ही इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। इनमें प्रयुक्त चित्र आँकड़ों को समझने में आपकी सहायता करते हैं। इन्हें **चित्रालेख** कहते हैं। एक चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। इसको केवल देख कर ही आँकड़ों से संबंधित प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते हैं।

www.rajteachers.com

आइए, एक और उदाहरण देखें –

कक्षा 6 के 40 विद्यार्थियों से उनके पसंद के खेलों के बारे में जाना गया जिन्हें चित्रालेख द्वारा दिखाया गया है–

पसंदीदा खेल	चित्रालेख की संख्या ☺ = 1 खिलाड़ी
खो–खो	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
फुटबाल	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
वॉलीबाल	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
बैडमिंटन	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
हॉकी	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

इस चित्रालेख से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(i) खो–खो खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या 8 है।

(ii) विद्यार्थियों द्वारा सबसे अधिक पसंद किया जाने वाला खेल बैडमिंटन है। 11 बालक / बालिका द्वारा यह खेल खेला जाता है।

(iii) फुटबाल को सबसे कम विद्यार्थी पसंद करते हैं।

विद्यालय के खेल मैदान में लगाए गए पेड़ों की संख्या इस प्रकार है: उनके आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

	= 5 पेड़
अमरूद	
केले	
पपीते	
संतरे	

(i) अमरूद के पेड़ों की संख्या।

(ii) संतरे के पेड़ों की संख्या।

(iii) 15 पेड़ किस फल के लगाए गए हैं?

(iv) केले के पेड़ से पपीते के पेड़ कितने अधिक हैं?

करो और सीखो

आप अपनी कक्षा के साथियों के साथ छोटे–छोटे समूह में बैठ जाएँ एवं उस समूह में आपका एक साथी चित्रालेख का सवाल बनाए, जिसे आता है उसके जवाब दें, उसके सभी जवाब आ जाएँ तो सवाल बनाने का मौका अन्य साथियों को दें। बारी–बारी से आप भी सवाल बनाने के अवसर का इंतजार करें।

www.rajteachers.com

किसी सर्वेक्षण से यह पता चला कि एक बड़े अस्पताल में वाहन दुर्घटनाओं के कारण भर्ती मरीजों की संख्या इस प्रकार थी।

वाहन दुर्घटनाओं के प्रकार	मरीजों की संख्या  = 100 मरीज
दो वाहनों के टकराने से	
टायर के फट जाने से	
दुपहिया वाहनों के फिसलने से	
गलत दिशा में चलते समय	
सडक पार करते समय	

(i) किस दुर्घटना के मरीज सबसे अधिक थे?

(ii) किस दुर्घटना के मरीज सबसे कम थे?

(iii) दुर्घटनाओं से मरीजों की कुल संख्या कितनी थी?

उपर्युक्त चित्रालेख के आधार पर सारणी पूरी कीजिए

वाहन दुर्घटनाओं के प्रकार	मरीजों की संख्या
दो वाहनों के टकराने से	
टायर के फट जाने से	100 से अधिक 200 से कम
दुपहिया वाहनों के फिसलने से	
गलत दिशा में चलते समय	100
सडक पार करते समय	

करो और सीखो

आप अपने गाँव के 200 व्यक्तियों के आँकड़े इकट्ठे कर पता कीजिए कि उनकी आय के स्त्रोत क्या (खेती, मजदूरी, नौकरी व व्यापार) हैं? तथा इसे चित्रालेख में दिखाइए।

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 15.1

1. निम्नांकित में से प्राथमिक एवं द्वितीयक आँकड़ों को पहचानिए।
   (i) प्रार्थना सभा में कक्षावार उपस्थिति की गणना।
   (ii) छात्र उपस्थिति रजिस्टर से कक्षा 6 के विद्यार्थियों की जातिवार संख्या।
   (iii) किसी सड़क से प्रातः 9:00 से 11:00 बजे तक गुजरने वाले वाहनों की संख्या।
   (iv) जयपुर से राजस्थान के प्रमुख नगरों की दूरी मानचित्र में देखकर बताना।

2. एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों की आयु (पूर्ण वर्षों में) निम्नानुसार पाई गई मिलान चिह्न सारणी बनाइए।

   11, 12, 11, 13, 14, 11, 12, 13, 15, 13, 13, 16, 14, 13, 14,
   13,12 ,14, 13, 12, 14, 13, 13, 12, 14, 14, 13, 12, 13, 14

   (i) ज्ञात कीजिए कितने विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष या उससे अधिक है ?
   (ii) किस आयु के विद्यार्थी सर्वाधिक हैं और कितने हैं ?
   (iii) 14 वर्ष से कम आयु वाले विद्यार्थियों की संख्या बताइए ?

3. 'स्वच्छ भारत–स्वस्थ भारत' विषय पर हुई एक निबंध प्रतियोगिता में 25 विद्यार्थियों ने 10 में से निम्नांकित अंक प्राप्त किए–

   6, 7, 7, 5, 8, 9, 8, 6, 7, 5, 8, 6, 6, 5, 4, 7, 6, 8, 8, 9, 7, 5, 9, 8, 10

   इन अंकों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके व्यवस्थित कीजिए तथा बताइए।
   (i) 6 तथा 6 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।
   (ii) 6 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।
   (iii) 8 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।

4. दिया गया चित्रालेख 5 परिवारों में सदस्यों की संख्या को दर्शाता है।

	संकेत ☺ = 1 सदस्य
परिवार A	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
परिवार B	☺ ☺ ☺ ☺
परिवार C	☺ ☺
परिवार D	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
परिवार E	☺ ☺ ☺ ☺

www.rajteachers.com

चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) किस परिवार में सदस्य संख्या अधिकतम है ?

(ii) किस परिवार में सदस्य संख्या न्यूनतम है ?

(iii) परिवार D एवं C के मध्य सदस्यों की संख्या का अंतर कितना है ?

(iv) पाँचों परिवारों में कुल मिलाकर कितने सदस्य हैं ?

5. किसी सप्ताह के विभिन्न दिनों में एक पोस्ट ऑफिस से बिकने वाले लिफाफों की संख्या नीचे दर्शाई गई है।

	संकेत ✉ = 5 लिफाफे
सोमवार	✉ ✉ ✉ ✉ ✉ ✉ ✉
मंगलवार	✉ ✉ ✉ ✉
बुधवार	✉ ✉ ✉ ✉ ✉
गुरुवार	✉ ✉ ✉ ✉ ✉ ✉
शुक्रवार	✉ ✉ ✉
शनिवार	✉ ✉

चित्रालेख को देख कर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) बुधवार को कितने लिफाफे बेचे गए ?

(ii) किस दिन बेचे गए लिफाफों की संख्या अधिकतम थी ?

(iii) यदि एक लिफाफे का मूल्य 5 रुपये हो तो सोमवार को बेचे गए लिफाफों का मूल्य क्या होगा ?

(iv) पूरे सप्ताह में कितने लिफाफे बेचे गए और उनका मूल्य कितना था ?

6 एक कक्षा के 30 विद्यार्थी विभिन्न खेल खेलते हैं। निम्न सारणी में उनके द्वारा खेले जाने वाले खेलों को दर्शाया गया है।

खेल	छात्रों की संख्या 🧍 = 1 छात्र
फुटबाल	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
खो–खो	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
वालीबाल	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
क्रिकेट	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍

www.rajteachers.com

बताइए–

(i) कितने विद्यार्थियों द्वारा खो–खो खेला जाता है ?

(ii) कौनसा खेल सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा खेला जाता है ?

(iii) कितने विद्यार्थी कोई खेल नहीं खेलते ?

5.4.1 चित्रालेखों को बनाना

यह एक रोचक क्रिया है आइए देखते हैं। पीने योग्य पानी की मात्रा प्रतिदिन घटती जा रही है। जलदाय विभाग एवं चिकित्सा विभाग इस बारे में गहन मंथन कर रहा है। इस हेतु उन्होंने अपनी बैठक में तय किया कि पानी के स्रोत जो किसी कारण से दूषित हो रहे हैं उनका पता लगाया जाए एवं जिस कारण से स्रोत दूषित हो रहा है उसको रोका जाए। इस हेतु एक जिले के आँकड़े इस प्रकार थे।

स्त्रोत	संख्या
कुएँ	8
तालाब	4
हैंडपम्प	5
बाँध	3
नलकूप	6

संकेत  = 1 स्त्रोत लेकर चित्रालेख निरूपित कीजिए।

हल

स्त्रोत	संख्या	संकेत  = 1 स्त्रोत
कुएँ		

हैंडपम्प		

(i) राधिका ने चित्रालेख अधूरा छोड़ दिया इसे आप पूरा कर सकते हैं ?

(ii) यदि संकेत  =10 स्त्रोत होता तो उस जिले के आँकड़े क्या होते ? सारणी में दिखाइए।

किसी सप्ताह एक कक्षा के 40 विद्यार्थियों में से मध्यान्ह भोजन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्नानुसार है। इसे एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

www.rajteachers.com

दिन	भोजन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	35
मंगलवार	31
बुधवार	37
गुरूवार	33
शुक्रवार	34
शनिवार	36

हल यदि हम 5 विद्यार्थियों को संकेत द्वारा दर्शाएँ तो

4 विद्यार्थियों के लिए संकेत होगा

3 विद्यार्थियों के लिए संकेत होगा

2 विद्यार्थियों के लिए संकेत होगा

1 विद्यार्थी के लिए संकेत होगा

इसका चित्रालेख निम्न प्रकार होगा–

दिन	भोजन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
गुरूवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

किसी वर्ष के प्रथम आठ महीनों में आंगनवाड़ी के लिए खरीदे गए फोर्टीफाइड आटे के बेग की संख्या निम्नलिखित है–

महीना	बेग
मार्च	200
अप्रेल	250
मई	250
जून	210
जुलाई	300
अगस्त	345
सितम्बर	205
अक्टूबर	340

www.rajteachers.com

उपर्युक्त को चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

संकेत = 100 बेग

महीना	बेग
मार्च	
अप्रेल	
मई	
जून	
जुलाई	
अगस्त	
सितम्बर	
अक्टूबर	

यहाँ मार्च, अप्रेल, मई और जुलाई के लिए चित्र बनाना कठिन नहीं है परन्तु 210, 340, 345 एवं 205 को चित्रों द्वारा निरूपित करना सरल नहीं है। हम निकटतम 10 और 5 को 00 व 45 को 50 के निकटतम मान में ले सकते हैं।

प्रश्नावली 15.2

1. एक प्राथमिक स्वास्थ्य केन्द्र में एक सप्ताह में बुखार की दवा पैरासिटामोल लेने वाले मरीजों की संख्या नीचे तालिका में दी गई है। एक टैबलेट = 5 मरीज चिह्न का पैमाना लेकर एक चित्रालेख बनाइए।

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
25	30	15	30	25	20	25

2. एक कक्षा के 25 विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए गए विषय नीचे दिए गए हैं।
हिन्दी, गणित, अंग्रेजी, विज्ञान, अंग्रेजी, हिन्दी, संस्कृत, गणित, कम्प्यूटर शिक्षा, सा. विज्ञान, विज्ञान, गणित, हिन्दी, गणित, विज्ञान, गणित, अंग्रेजी, हिन्दी, अंग्रेजी, हिन्दी, गणित, विज्ञान, गणित, कम्प्यूटर शिक्षा और गणित।

उपर्युक्त आँकड़ों को मिलान चिह्नों द्वारा बारम्बारता सारणी में व्यवस्थित करें तथा बताएँ कि सबसे अधिक पसंद किया जाने वाला विषय कौनसा है तथा सबसे कम पसंद किया जाने वाला विषय कौनसा है?

3. सरपंच चुनाव में विभिन्न चुनाव चिह्नों के प्रत्याशियों को निम्न प्रकार से वोट प्राप्त हुए।

चुनाव चिह्न	साइकिल	टीवी	गेंद	पंखा
प्राप्त वोट	250	300	350	250

www.rajteachers.com

उपर्युक्त तालिका में दर्शाए तथ्यों को एक उचित पैमाना लेकर चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए एवं बताइए।

(i) किस चुनाव चिह्न का प्रत्याशी चुनाव जीता ?

(ii) विजेता एवं उप विजेता प्रत्याशी के मध्य वोटों का अन्तर कितना रहा ?

4. एक कक्षा के छात्रों की ऊँचाई सेमी में निम्नानुसार पाई गई–

148, 150, 152, 149, 151, 154, 153, 152, 150, 149, 148, 152, 153, 154, 152, 151, 152, 153, 152, 152, 153, 151, 152, 152, 153

(i) उपर्युक्त ऊँचाई की मिलान चिह्न की सहायता से बारंबारता सारणी बनाइए।

(ii) उचित पैमाना लेकर चित्रालेख का निर्माण कीजिए।

(iii) सबसे लम्बे विद्यार्थी की ऊँचाई बताइए।

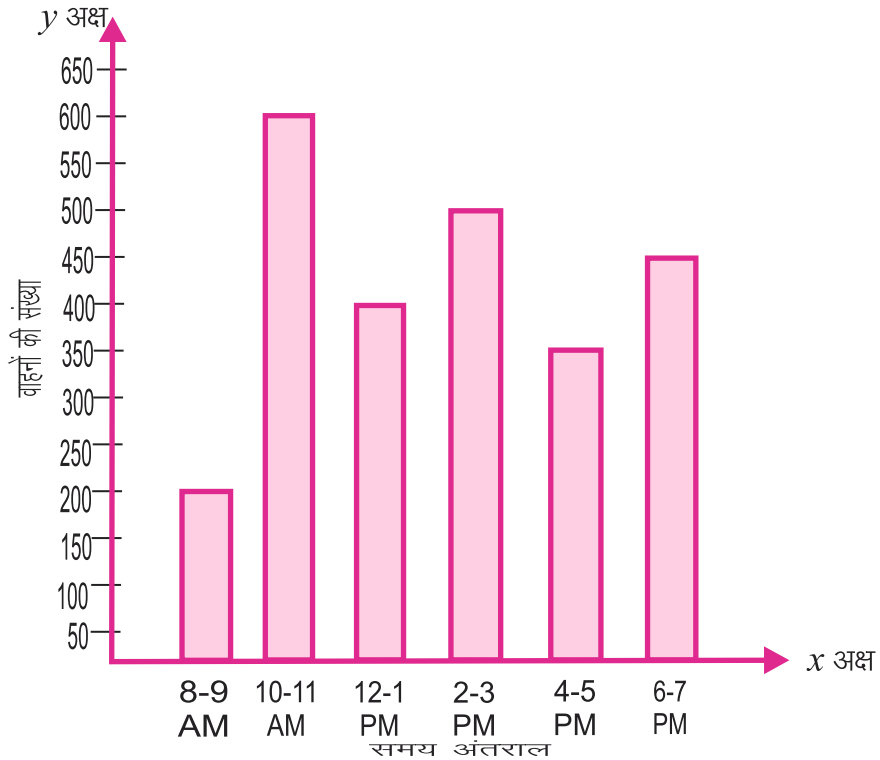
(iv) सबसे लम्बे और सबसे छोटे विद्यार्थियों की ऊँचाई में अन्तर बताइए।

15.5 दंड आलेख

आँकड़ों को चित्रालेख द्वारा निरूपित करने में समय अधिक लगता है और उसे बनाने में कठिनाई भी होती है। अतः आँकड़ों को निरूपित करने की अन्य विधि है दंड आलेख। दंड आलेख समान चौड़ाई के दंड हैं। किन्हीं दो दंडों के बीच की दूरी भी समान होती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दंड की लंबाई दी हुई संख्या को दिखाती है। ये दंड क्षैतिज या उर्ध्वाधर खींचे जा सकते हैं। आँकड़ों को प्रस्तुत करने का यह निरूपण **दंड आरेख या दंड आलेख** कहलाता है।

15.5.1 दंड आलेख पढ़ना

राजस्थान पुलिस द्वारा जयपुर के एक भीड़ वाले व्यस्त चौराहे के अंतर्गत अलग–अलग समय में वाहनों की संख्या नीचे दंडालेख में दिखाई गई है। समय के अंतराल को x अक्ष पर एवं वाहनों की संख्या को y अक्ष पर लेते हैं। साथ ही पैमाना एक इकाई बराबर 50 वाहन लेते हैं।



www.rajteachers.com

निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

1. यह कौनसा दंड कहलाएगा? (क्षैतिज/उर्ध्वाधर दंड)
2. वह समय अंतराल बताइए जब यातायात सबसे कम होता है ?
3. वह समय अंतराल बताइए जब यातायात सबसे अधिक होता है ?
4. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन अधिकतम कितने हैं ?
5. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन न्यूनतम कितने हैं ?
6. वह समयांतराल बताइए जब यातायात के साधन समान हों ?

हल

1. हम देख सकते हैं कि यह दण्डालेख उर्ध्वाधर दण्डालेख कहलाता है।
2. इन दण्डों का अध्ययन करने पर सबसे कम यातायात प्रातः 8 से 9 बजे होता है।
3. सबसे अधिक यातायात प्रातः 10 से 11 बजे होता है।
4. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन अधिकतम 600 हैं।
5. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन न्यूनतम 200 हैं।
6. दोपहर 12 से 1 एवं सायं 6 से 7 के बीच यातायात के साधन समान हैं।

करो और सीखो

1. ऊपर दिए गए दण्ड आलेख को चित्रालेख द्वारा दर्शाइए।
2. यदि समय अन्तराल को y अक्ष पर तथा वाहनों की संख्या x अक्ष पर लेते हैं तब कैसा दण्डालेख बनेगा, बनाकर दर्शाइए।

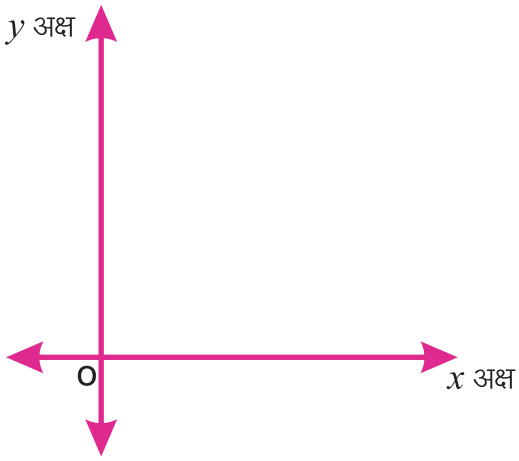
किसी आदर्श विद्यालय में विभिन्न मदों पर होने वाली आय जो विद्यालय समय पश्चात ग्रामवासियों को दी जाने वाली सशुल्क सुविधा से होती हैं। इसे विद्यालय प्रबन्ध समिति के समक्ष रखा गया जो इस प्रकार है–

मद	आय (रु. में)
खेल प्रशिक्षण	4,000
विषयगत कक्षाएँ	10,000
विद्यालय विकास	3,000
कम्प्यूटर प्रशिक्षण	6,000
दान दाता द्वारा	8,000
सब्जी पैदावार एवं बागवानी	7,000

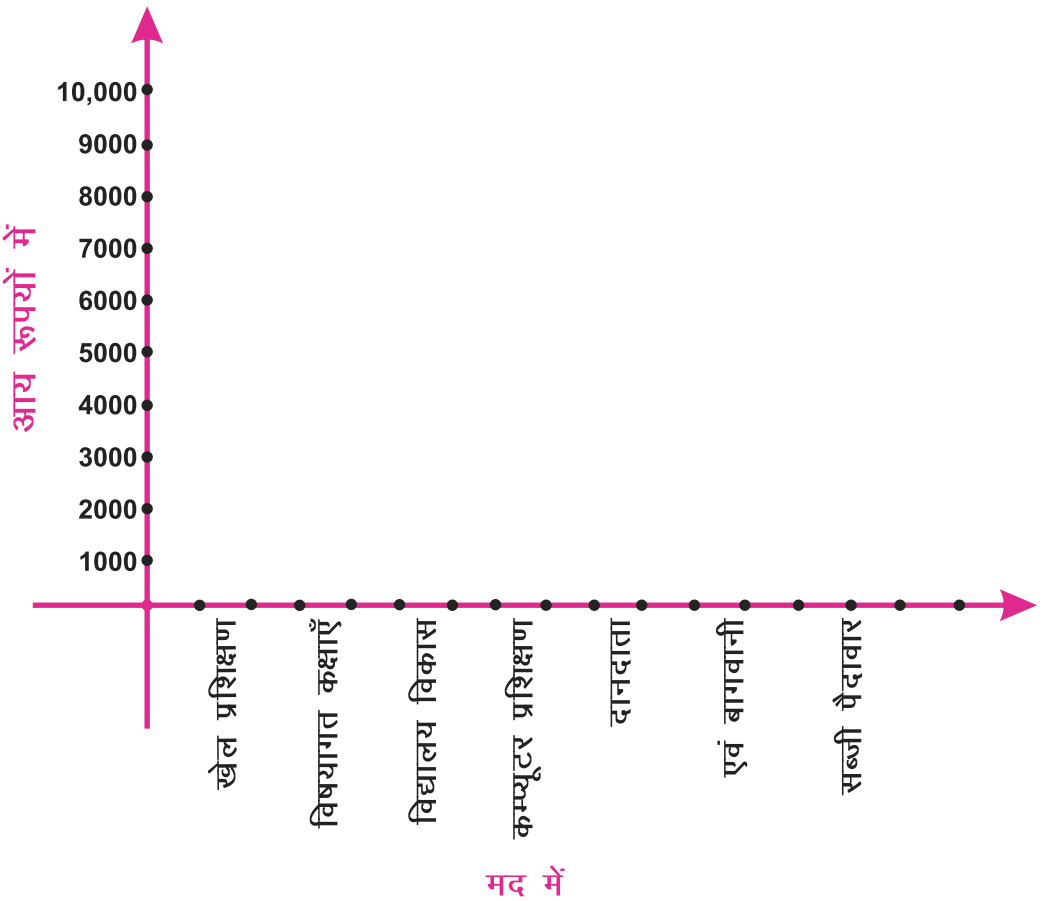
विद्यालय प्रबंध समिति द्वारा इस आय को सराहा गया है एवं दंडालेख में दिखा कर प्रधानाचार्य कक्ष में लगवाने का प्रस्ताव पास किया गया है। अध्यापक द्वारा दंडालेख में निरूपित करने के चरण इस प्रकार थे–

www.rajteachers.com

1. परस्पर दो लम्ब रेखाएँ एक उर्ध्वाधर एवं एक क्षैतिज रेखा खींची गई।



2. क्षैतिज रेखा के अनुदिश मद अंकित किया गया एवं उर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश आय को अंकित किया गया। मद अंकित करते समय यह ध्यान रखा गया कि दंड के बीच दूरी व दंड की चौड़ाई समान हो।

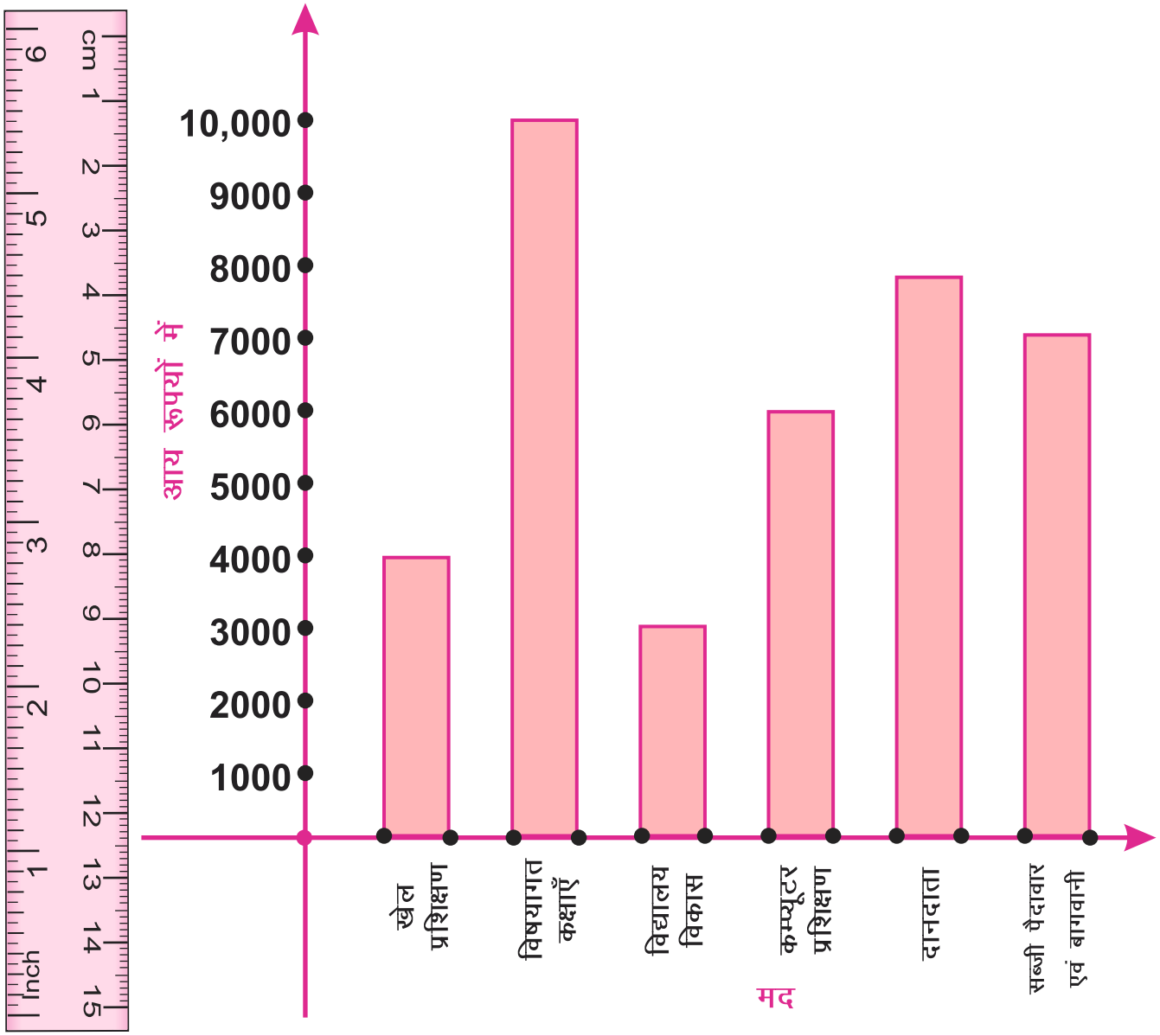


www.rajteachers.com

3. उर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक सुविधाजनक पैमाना लिया गया। यहाँ पर सुविधाजनक पैमाना
1 इकाई = 1000 रुपये और इसके अनुसार संगत मान अंकित किया गया है।

विभिन्न मदों के लिए दण्डों की लम्बाई परिकलित की गई जो इस प्रकार है–

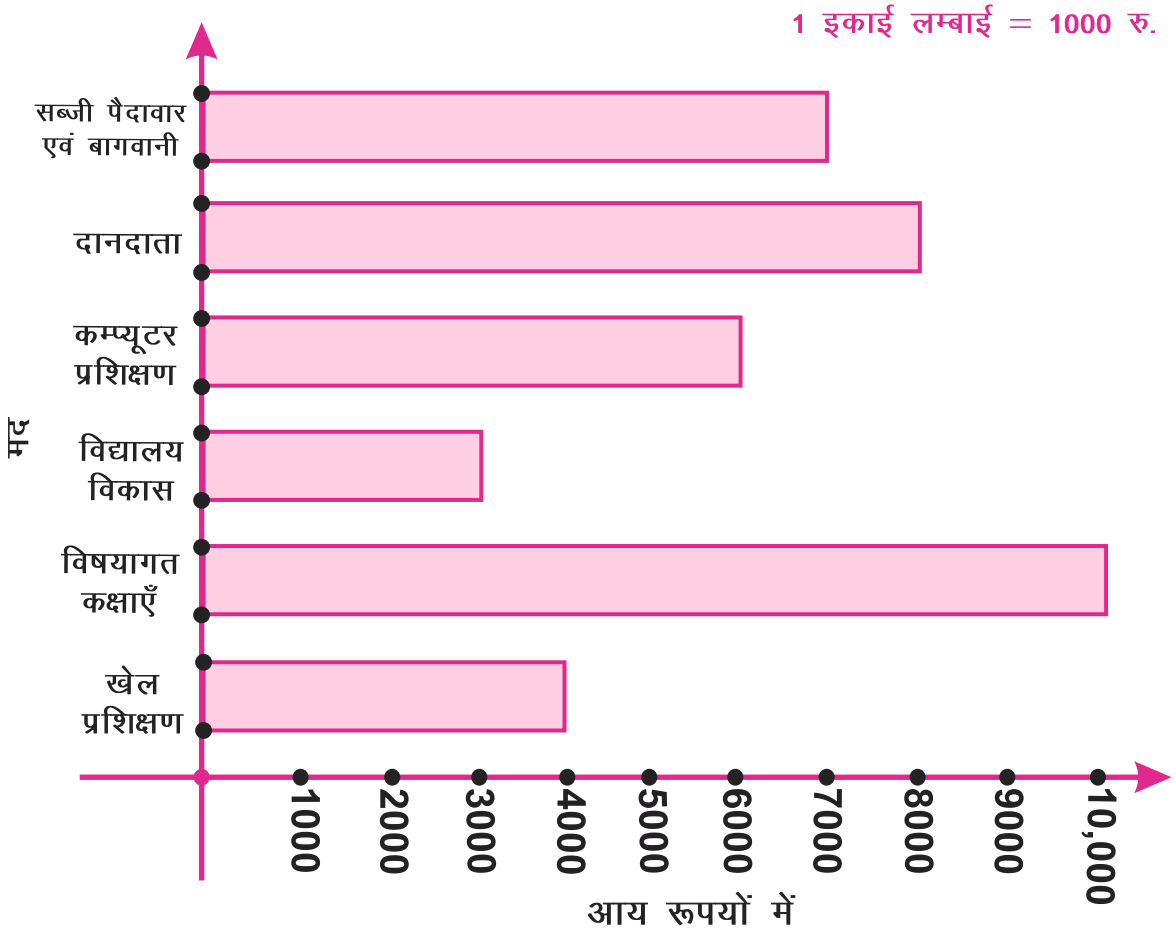
खेल	:	4000 ÷ 1000	= 4 इकाई
विषयगत कक्षाएँ	:	10000 ÷ 1000	= 10 इकाई
विद्यालय विकास	:	3000 ÷ 1000	= 3 इकाई
कम्प्यूटर प्रशिक्षण	:	6000÷1000	= 6 इकाई
दानदाता	:	8000÷1000	= 8 इकाई
सब्जी पैदावार एवं बागवानी	:	7000÷1000	= 7 इकाई



www.rajteachers.com

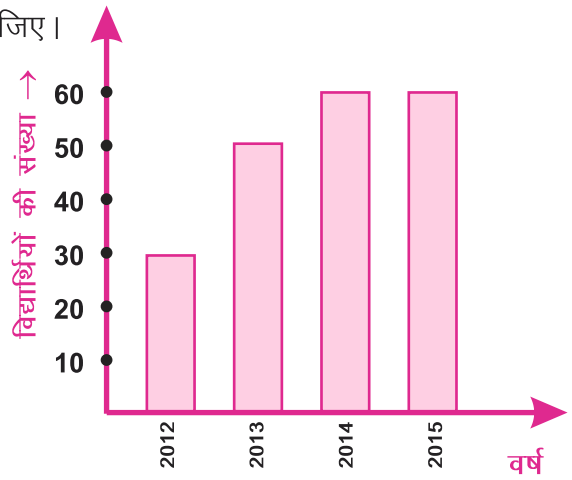
इस दण्डालेख को देख कर प्रधानाचार्य जी ने निर्देश दिए कि इन्हीं आँकड़ों का मद उर्ध्वाधर अक्ष की ओर व आय क्षैतिज अक्ष पर रख कर दंडालेख बनाएँ। तब इस प्रकार बनाया गया–

1 इकाई लम्बाई = 1000 रु.



प्रश्नावली 15.3

1. किसी स्कूल में छात्रवृत्ति पाने वाले विद्यार्थियों को निम्नलिखित दण्डालेख में दर्शाया गया है। इस दण्डालेख को पढिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



(i) इस आलेख का पैमाना क्या है?

(ii) वर्ष 2014 में कितने विद्यार्थियों को छात्रवृत्ति मिली?

(iii) सबसे कम छात्रवृत्ति किस वर्ष मिली?

www.rajteachers.com

2. नीचे कुछ जानवरों के औसत जीवनकाल दिए गए हैं।

हाथी	70 वर्ष,
बकरी	15 वर्ष,
घोड़ा	50 वर्ष,
गाय	22 वर्ष,
हिरण	40 वर्ष,
बैल	28 वर्ष

उपर्युक्त तथ्यों को दण्ड आलेख द्वारा दर्शाइए एवं निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) सबसे अधिक औसत उम्र वाले जानवर का नाम बताइए?

(ii) सबसे कम औसत उम्र वाला जानवर कौनसा है?

(iii) गाय और बैल के औसत जीवन काल में अन्तर बताइए?

3. एक कॉलोनी में विभिन्न व्यवसायों से जुड़े लोगों की संख्या निम्न तालिका में दी गई है।

व्यवसाय	अध्यापक	डॉक्टर	दुकानदार	मजदूर	वकील
व्यक्तियों की संख्या	22	8	19	26	10

उपर्युक्त तालिका के आधार पर उचित पैमाना लेकर

(i) उर्ध्वाधर दण्ड आलेख

(ii) क्षैतिज दण्ड आलेख का निर्माण कीजिए।

4. हरखू के खेत में इस वर्ष तालिका में दर्शाए अनुसार पैदावार हुई।

धान का नाम	मक्का	बाजरा	मोठ	ग्वार	सोयाबीन
मात्रा (किग्रा में)	12500	20600	13000	24000	18500

उचित पैमाना लेते हुए उपर्युक्त सूचना के आधार पर एक क्षैतिज दण्ड आलेख खींचिए एवं निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए

(i) किस धान की पैदावार सर्वाधिक हुई है व कितनी?

(ii) कुल पैदावार कितनी है?

(ii) किस धान की पैदावार 20600 कि.ग्रा. है?

www.rajteachers.com

5. जीवन कौशल बालविकास मेले की विभिन्न प्रतियोगिताओं में भाग लेने वाले बालकों की संख्या निम्न तालिका में दर्शाई गई है।

प्रतियोगिता	भाग लेने वालों की संख्या
चित्र बनाएँ	34
आओ गीत गाएँ	12
वादविवाद	18
क्विज प्रतियोगिता	36

उचित पैमाना लेकर उर्ध्वाधर तथा क्षैतिज दण्ड आलेख बनाइए।

6. गणित क्विज प्रतियोगिता के अन्तर्गत 40 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्न तालिका में दर्शाया गया है।

अंक समूह	विद्यार्थियों की संख्या
0 – 20	3
20 – 40	6
40 – 60	12
60 – 80	14
80 – 100	5

बताइए–

(i) 40 – 60 अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या?

(ii) किस अंक समूह में विद्यार्थियों की संख्या सर्वाधिक है?

(iii) 60 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या?

हमने सीखा

1. सूचना देने के लिए एकत्रित की गई संख्याओं के संग्रह को आँकड़े कहते हैं।
2. आँकड़े दो प्रकार के होते हैं (i) प्राथमिक आँकड़े (ii) द्वितीयक आँकड़े।
3. दिए हुए आँकड़ों से विशेष सूचना प्राप्त करने के लिए उन्हें मिलान चिह्नों के प्रयोग से सारणी बद्ध किया जा सकता है।
4. चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। हमनें चित्र लेखों की व्याख्या करना भी सीखा और उससे सम्बंधित प्रश्नों के उत्तर देना भी सीखा। हमने कुछ वस्तुओं को संकेतों से निरूपित करके चित्रालेखों को खींचना भी सीखा है। उदाहरणार्थ ✱ = 5 विद्यार्थी लेकर।
5. आँकड़ों को एक दण्ड आलेख द्वारा कैसे निरूपित किया जा सकता है। एक दण्ड आलेख में समान दूरी पर समान चौड़ाई के दण्ड क्षैतिज या उर्ध्वाधर रूप में खींचे जाते हैं। प्रत्येक दण्ड की लम्बाई वांछित सूचना दर्शाती है।
6. ऐसा करने के लिए हमने एक पैमाना तय करने की प्रक्रिया पर भी चर्चा की। उदाहरणार्थ एक इकाई बराबर 100 बैग। हमने दण्ड आलेखों का अभ्यास भी किया। हमने इसकी व्याख्या करना भी सीखा।

www.rajteachers.com

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) पाँच हजार सात सौ बयासी (ii) पचहत्तर हज़ार आठ सौ उनासी
   (iii) तीन लाख नवासी हज़ार सतासी (iv) इक्कीस लाख बत्तीस हज़ार चार सौ बावन
   (v) सात करोड़ अड़सठ लाख बानवे हज़ार चार सौ उनासी
   (vi) पचास लाख साठ हज़ार सात सौ अठानवे
2. (i) 68,529 (ii) 89,079 (iii) 5,72,057 (iv) 90,90,990 (v) 1,21,31,041
3. स्वयं कीजिए।
4. (i) > (ii) < (iii) < (iv) > (v) >
5. (i) 4835 < 5348 < 8435 < 13584 < 25843 (ii) 1001 < 1010 < 1011 < 1100
   (iii) 50,050 < 50,500 < 50,505 < 55,555
   (iv) 5,86,85,376 < 5,86,85,378 < 5,86,95,306 < 5,86,95,376
6. (i) 9,754 > 8,320 > 847 > 571 (ii) 6,040 > 4,646 > 4,600 > 4,060
   (iii) 38,802 > 36,501 > 25,751 > 9,801 (iv) 11,001 > 10,101 > 10,011 > 10,001

प्रश्नावली 1.2

1. (i) 100 (ii) 1 (iii) 1000
   (iv) 1 (v) 1000 मीटर (vi) 1000
2. 5,76,994 3. 30,167 4. 34,029 5. 62,964
6. 42,935 7. 24,660 8. 12,385 9. 1,36,836
10. 3,000 11. 600

प्रश्नावली 1.3

1. (i) 900 (ii) 5,900 (iii) 3,500 (iv) 2,500
2. (i) 1800 (ii) 20,300 (iii) 5,91,600
3. 4,400 4. 1600 गायें 5. 7 लीटर

प्रश्नावली 2.1

1. (i) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 (ii) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12,18, 36
   (iii) 1, 2, 4, 7, 14, 28 (iv) 1, 2, 4, 5,10, 20, 25, 50, 100
   (v) 1, 5, 25, 125
2. (i) 7, 14, 21, 28, 35 (ii) 12, 24, 36, 48, 60
   (iii) 17, 34, 51, 68, 85 (iv) 15, 30, 45, 60, 75
   (v) 18, 36, 54, 72, 90

www.rajteachers.com

3. 11, 13, 17, 19, 23, 29 4. 2 5. 6, 12, 18, 30 6. 12, 24, 36
7. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य (vi) असत्य (vii) सत्य

प्रश्नावली 2.2

1. (i) 2 x 2 x 7 (ii) 2 x 3 x 3 x 3 (iii) 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 (iv) 2 x 2 x 37
   (v) 2 x 2 x 3 x 13
2. 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5
3. (i) 1, 2, 3, 4, 6, 12 (ii) 1, 5 (iii) 1, 2, 3, 6 (iv) 1
4. (i) 20, 40, 60 (ii) 24, 48, 72 (iii) 20, 40, 60 (iv) 45, 90, 135
5. 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48

प्रश्नावली 2.3

1. (i) 12 (ii) 14 (iii) 13 (iv) 5 (v) 1
2. (i) 1 (ii) 2 (iii) 1
3. 5 मीटर 4. 4 लीटर 5. 18 मीटर

प्रश्नावली 2.4

1. (i) 30 (ii) 28 (iii) 108 (iv) 1008
2. 30 3. 15 4. 6 बजकर 24 मिनट 5. 240
6. 5 बजकर 3 मिनट

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 56 (ii) 99 (iii) 304, 306 (iv) 0 (v) 0
2. (i) 1,202 (ii) 2,405 (iii) 3,554 (iv) 4,443
3. (i) 2,305 (ii) 3,612 (iii) 4,001 (iv) 5,061
4. (i) 188,190 (ii) 198, 200 (iii) 208, 210 (iv) 299, 301 5. 0
6. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य
   (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) सत्य (x) असत्य
   (xi) सत्य

प्रश्नावली 3.2

1. (i) 286 (ii) 296 (iii) 175 (iv) 186
2. (i) 1,22,500 (ii) 79,000 (iii) 8,500 (iv) 20,000
3. (i) 18,500 (ii) 120 (iii) 54,27,900 (iv) 120
4. (i) 19,610 (ii) 38,480 (iii) 5,508 (iv) 1,59,264
5. (i) (b) (ii) (a) (iii) (d) (iv) (c)
8. (i) 13,938 (ii) 50,000 (iii) 21,280
9. (i), (iv) 10. (i) d (ii) a

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 4.1

1. (i) $+45^0$ c (ii) -10^0 c (iii) +300 रूपये (iv) -500 रूपये
3. (i) > (ii) > (iii) > (iv) > (v) < (vi) >
4. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य
5. (i) - 4, -3, -2, -1, 0 (ii) -5, -4, -3
   (iii) - 2, -1, 0, 1, 2 (iv) -10, -9, -8, -7, -6
6. (i) आरोही = -7, -3, 3, 5 (ii) आरोही = - 2, - 1, 0, 3
   अवरोही = 5, 3, -3, -7 अवरोही = 3, 0, -1, -2
   (i) आरोही = - 6, 1, 3 (iv) आरोही = -5, -1, 2, 4
   अवरोही = 3, 1, - 6 अवरोही = 4, 2, -1, -5

प्रश्नावली 4.2

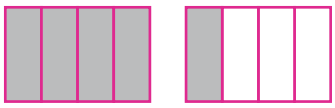
1. (i) 9 (ii) 0 (iii) -2 (iv) -5
2. (i) 6 (ii) -7 (iii) +3 (iv) 0
3. (i) 9 (ii) -10 (iii) -100 (iv) -650 (v) -10 (vi) -260
4. (i) -92 (ii) -81 (iii) 50 (iv) 91

प्रश्नावली 4.3

1. (i) 20 (ii) -8 (iii) 6 (iv) -15 (v) 33 (vi) -49
2. (i) 5 (ii) (-7) (iii) 0 (iv) (-4) (v) (-2) (vi) -4
3. (i) < (ii) = (iii) > (iv) >
4. (i) 0 (ii) -11 (iii) 8 (iv) -28

प्रश्नावली 5.1

1. (i) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{5}$

2. (i)  (ii)  (iii) 

   (iv) 

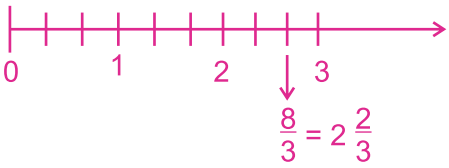
   (अलग–अलग तरह से चित्रों द्वारा भी भिन्नों को प्रदर्शित किया जा सकता है)

3. $\frac{7}{12}$ घंटे 4. $\frac{7}{15}$ 5. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

www.rajteachers.com

6. (i) 

(ii) 

(iii) 

7. (i) $6\frac{2}{3}$ (ii) $2\frac{1}{3}$ (iii) $3\frac{1}{6}$

8. (i) $\frac{23}{3}$ (ii) $\frac{23}{4}$ (iii) $\frac{9}{2}$

प्रश्नावली 5.2

1. (i) हाँ (ii) नहीं 2. (i) 14 (ii) 3 (iii) 12 (iv) 1 (v) 3

3. (i) $\frac{18}{24}$ (ii) $\frac{15}{20}$ (iii) $\frac{24}{32}$ (iv) $\frac{9}{12}$

4. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $\frac{1}{12}$

5. (i) d (ii) f (iii) h (iv) g (v) e (vi) c (vii) i
(viii) b (ix) j (x) a

प्रश्नावली 5.3

1. (i) अवरोही क्रम – $\frac{7}{8}>\frac{5}{8}>\frac{3}{8}>\frac{2}{8}>\frac{1}{8}$ आरोही क्रम – $\frac{1}{8}<\frac{2}{8}<\frac{3}{8}<\frac{5}{8}<\frac{7}{8}$

(ii) अवरोही क्रम – $\frac{5}{6}>\frac{4}{6}>\frac{3}{6}>\frac{1}{6}$ आरोही क्रम – $\frac{1}{6}<\frac{3}{6}<\frac{4}{6}<\frac{5}{6}$

2. (i) $\frac{5}{6} > \frac{9}{11}$ (ii) $\frac{3}{4} > \frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$

3. समूह 1 $\frac{2}{12} = \frac{10}{60} = \frac{12}{72} = \frac{16}{96}$ समूह 2 $\frac{3}{15} = \frac{10}{50} = \frac{15}{75} = \frac{18}{90}$ समूह 3 $\frac{8}{50} = \frac{16}{100} = \frac{12}{75} = \frac{4}{25}$

4. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं

5. दोनों कक्षाओं में बराबर विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए।

6. रोहिणी ने।

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 5.4

1. (i) $\frac{7}{19}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{49}{23}$ (iv) $\frac{11}{14}$ (v) $\frac{169}{60}$ (vi) $\frac{193}{30}$ (vii) $\frac{23}{3}$ (viii) $\frac{326}{35}$

2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{14}{15}$ 4. 5 किमी 5. $\frac{5}{2}$ लीटर या $2\frac{1}{2}$ लीटर 6. पूरी 1 दीवार पर

प्रश्नावली 5.5

1. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{13}{35}$ (iii) $\frac{33}{10}$ (iv) $\frac{65}{12}$ (v) $\frac{7}{12}$ (vi) $\frac{1}{10}$

2. $\frac{5}{28}$ लीटर 3. $\frac{1}{2}$ मी. 4. $\frac{1}{3}$ भाग 5. $\frac{17}{10}$ किग्रा. 6. गीता, $\frac{1}{4}$ मिनट

7.(i)

⊖ \ ⊕ →			
	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

(ii)

⊖ \ ⊕ →			
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{15}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{30}$
	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$

प्रश्नावली 6.1

1. (i) 12.3

   (ii) 13.7

   (iii) 251.2

2.

	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश
(i)		1	9	4
(ii)			0	5
(iii)		1	0	9
(iv)	2	0	5	9

www.rajteachers.com

3. (i) 0.7 (ii) 20.4 (iii) 14.9 (iv) 600.3

4. (i) 0.3 (ii) 4.8 (iii) 358.1 (iv) 90.3 (v) 1.5 (vi) 0.4 (vii) 4·5 (viii) 3.6

5. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{14}{5}$ (iv) $\frac{137}{10}$ (v) $\frac{106}{5}$ (vi) 1 (vii) $\frac{32}{5}$

6. (i) 0.2 सेमी (ii) 3 सेमी (iii) 11.6 सेमी (iv) 5.2 सेमी (v) 9.5 सेमी (vi) 19.1 सेमी

7. (i) 0 तथा 1 के बीच, 1 (ii) 5 व 6 के बीच, 5 (iii) 9 पर (iv) 4 व 5 के बीच, 5

(v) 3 व 4 के बीच, 4

8.



9. 9.5 सेमी 10. 1.6 सेमी

प्रश्नावली 6.2

1. (i) 230.057 (ii) 1.305 (iii) 253.505 (iv) 340.120 (v)13.030

2. (i) 23.306 (ii) 0.736 (iii) 137.06 (iv) 703.053 (v) 0.307 (vi) 0.19

3. (i) एक दशमलव दो शून्य (ii) एक सौ आठ दशमलव पाँच छः

(iii) दस दशमलव सात पाँच छः (iv) छः दशमलव शून्य एक

4. (i) $\frac{9}{50}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{33}{500}$ (iv) $\frac{2}{5}$

5. (i) 0.4 > 0.04 (ii) 3 > 0.7 (iii) 0.999 > 0.19 (iv) 5.64 > 5.603

6. (i) 0.05 रु. (ii) 0.75 रु. (iii) 0.80 रुपये (iv) 0.50 रु.

7. (i) 70.005 किमी (ii) 0.088 किमी (iii) 0.8 किमी

8. (i) 8.515 (ii) 315.29 (iii) 13.175 (iv) 69.12 (v) 3.03 (vi) 1.34

9. 118.270 किग्रा
10. 8.300 किमी
11. 16.25 मी
12. 2 किग्रा. 100 ग्राम

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 7.1

1. (i) 164 (ii) 182 (iii) 1351
(iv) 814 रूपये 11 पैसे (v) 162 किमी 131 मीटर (vi) 227 किग्रा 48 ग्राम

प्रश्नावली 7.2

1. (i) 48 (ii) 28 (iii) 289
(iv) 267 (v) 18 रूपये 67 पैसे (vi) 68 मीटर 55 सेमी
(vii) 155 किग्रा. 887 ग्राम

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $1\bar{2}$ (ii) $3\bar{3}$ (iii) 122 (iv) $1\bar{2}\bar{2}$ (v) $10\bar{4}$

प्रश्नावली 7.4

1. (i) 25 (ii) 46 (iii) 128 (iv) 458 (v) 577

प्रश्नावली 7.5

1. (i) 14 (ii) 31 (iii) 23 (iv) 09 (v) 28

प्रश्नावली 7.6

1. (i) 47 (ii) 687 (iii) 164 (iv) 287

प्रश्नावली 7.7

1. (i) 156 (ii) 209 (iii) 195 (iv) 56 (v) 54 (vi) 96
(vii) 10608 (viii) 11342 (ix) 12208 (x) 8918 (xi) 9024
(xii) 10192 (xiii) 7905

प्रश्नावली 7.8

1. (i) भागफल = 1, शेषफल = 35 (ii) भागफल = 45, शेषफल = 01
(iii) भागफल = 3, शेषफल = 10 (iv) भागफल = 12, शेषफल = 02
(v) भागफल = 11, शेषफल = 02 (vi) भागफल = 38, शेषफल = 02

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 8.1

1. (i) XY (ii) AC , AB, BC (iii) PQ , QR, RS

(iv) UV, VW, WX, XY, YZ

प्रश्नावली 8.2

1. समान्तर रेखाएँ ; = AB, CD , तथा MN, SN

प्रतिच्छेदी रेखाएँ ; = XY, WZ तथा PQ, RS

2. संगामी रेखाएँ 3. स्वयं कीजिए

4. PQ ⊥ QR , XY ⊥ PQ , AB ⊥ BC

प्रश्नावली 8.3

1.(i) ∠1 = अधिक कोण (ii) ∠2 = समकोण

(iii) ∠3 = न्यून कोण (iv) ∠4 = प्रतिवर्ती कोण

2. (i) d (ii) c (iii) (iv) b (v) e

प्रश्नावली 8.4

1. त्रिज्या = OS
   व्यास = AB
   जीवा = PR
   केन्द्र = 0

2. (i) सत्य (ii) असत्य
   (iii) सत्य (iv) सत्य
   (v) असत्य

3. छायांकित ACB = वृत्तखण्ड
   छायांकित EOD = त्रिज्यखण्ड

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 9.1

1. खुली आकृतियाँ (i), (vi) बंद आकृतियाँ (ii), (iii), (iv), (v)
2. O 3. (i) PQR (ii) S,L,U,T (iii) हाँ

प्रश्नावली 9.2

1. स्वयं कीजिए 2. (i) समकोण त्रिभुज (ii) न्यून कोण त्रिभुज (iii) अधिक कोण त्रिभुज
3. (i) समबाहु त्रिभुज (ii) विषमबाहु त्रिभुज (iii) समद्विबाहु त्रिभुज
4. (i) 5 त्रिभुज (नाम स्वयं लिखे) (ii) 4 त्रिभुज (नाम स्वयं लिखे)
5. (i) अधिक कोण त्रिभुज (ii) न्यून कोण त्रिभुज (iii) समकोण त्रिभुज
6. (i) विषमबाहु (ii) समद्विबाहु (iii) समबाहु
7. (i) सही (ii) गलत (iii) गलत (iv) सही (v) सही

प्रश्नावली 9.3

1. (i) चार चतुर्भुज (नाम स्वयं लिखिए) (ii) दो चतुर्भुज (नाम स्वयं लिखिए)
2. (i) 6 (ii) 5 3. स्वयं कीजिए।
4. (i) वर्ग–5, आयत–6 (ii) वर्ग–2, आयत–1
5. (i) $\angle R$ (ii) $\angle Q$ या $\angle S$ (iii) PS (iv) QP या RS (v) $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$, $\angle S$
6. (i) गलत (ii) सही (iii) गलत (iv) सही

प्रश्नावली 10

1. शंकु, गोला, बेलन, घन, घनाभ। 2. स्वयं कीजिए।
3. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) सत्य (vi) असत्य
4. घनाभ के शीर्ष = P, Q, R, S, J, K, L, M
   घनाभ के किनारे = PQ, QR, RS, SP, JK, KL, LM, MJ, PJ, QK, RL, SM
   घनाभ के फलक = PQRS, JKLM, PQKJ, SRLM, PJMS, QKLR

प्रश्नावली 11

1. (a) (i), (ii), (iv), (v) (b) (iv)
2. (i) तीन वर्णाक्षर (ii) नौ वर्णाक्षर (iii) पाँच वर्णाक्षर
   (iv) सात वर्णाक्षर (v) तीन वर्णाक्षर (vi) एक वर्णाक्षर (स्वयं बताइए)
3. (i) 1 (ii) 1 (iii) 2
   (iv) 2 (v) 2 (vi) 3

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 12.1

1. (i) 2a (ii) 3a (iii) 4a 2. $4x$

3. (i) (x-5) वर्ष (ii) (P+5) वर्ष 4. $\frac{x}{5}$ या $x \div 5$

5.

x	1	2	3	4	5	6	7
$2x$+3	5	7	9	11	13	15	17

प्रश्नावली 12.2

1. (i) 3 - 7 + 4, 3 + 7 - 4 (ii) 3 x 7 + 4, 3 + 7 x 4

2. (i) बीजीय (ii) संख्यात्मक (iii) संख्यात्मक
(iv) बीजीय (v) बीजीय (vi) बीजीय

3.

क्र.सं.	व्यंजक	जोड़	घटाव	गुणा	भाग
1.	x+5	✓	-	-	-
2.	7m+3	✓	-	✓	-
3.	y-3x	-	✓	✓	-
4.	x-y-z	-	✓	-	-
5.	$3x-10-\frac{z}{5}$	-	✓	✓	✓
6.	$\frac{y}{17}$	-	-	-	✓

4. (i) a+7 (ii) b-10 (iii) $4x$ (iv) $\frac{x}{4}$ (v) 7-x (vi) $10 \div q$ या $\frac{10}{q}$

5. (i) 2n+15 (ii) $2x$ -15 (iii) 2P+3 (iv) 2q-3 (v) 5y -11 (vi) -3z+11

6. उदाहरणार्थ 5q - 3 (स्वयं बनाइए)

प्रश्नावली 12.3

1. (i) हाँ चर x (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) नहीं (v) हाँ, चर q (vi) हाँ, चर t

2. y = 5 से

3. (i) नही (ii) हाँ

4. (i) x = 5
(ii) P = 12
(iii) x = 8

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 13.1

1. (i) 5 : 3 (ii) 5 : 8 2. (i) 8 : 13 (ii) 5 : 1
3. (i) 2 : 1 (ii) 1 : 4 (iii) 1 : 2 4. 7,10,35, हाँ
5. (i) 1 : 6 (ii) 2 : 1 (iii) 5 : 11 (iv) 7 : 11
6. (i) 1 : 5 (ii) 4 : 25 (iii) 1 : 4 (iv) 4 : 3
7. 13 : 12 8. 4 : 3 9. 1 : 2
10. तलिस्मा 10,000 रु, गुरुमित 25,000 रु 11. स्वयं कीजिए।
12. (i) 3 : 1 (ii) 4 : 1 (iii) 5 : 2 (iv) 2 : 1

प्रश्नावली 13.2

1. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) नहीं
2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
3. (i) सही (ii) सही (iii) सही (iv) गलत
4. (i) समानुपाती नहीं है। (ii) समानुपाती है। मध्य पद – 250, 40 बाह्य पद – 1000,10
(iii) समानुपाती नहीं है। (iv) समानुपाती है। मध्य पद – 65, 9 बाह्य पद – 39, 15

प्रश्नावली 13.3

1. 27 रुपये 2. 375 रुपये 3. 360 रुपये 4. 45 पौधों के
5. 75 लीटर 6. 5 लीटर 7. 8 घण्टे 8.150 कुर्सियाँ
9. 42,000 रुपये 10. कबीर, 9 रन प्रति ओवर
11. (i) 115.50 रुपये (ii) 10 किग्रा

प्रश्नावली 14.1

1. (i) 21 सेमी (ii) 68 सेमी (iii) 24 सेमी

2. 20 सेमी

3. (i) 9 सेमी (ii) 12 सेमी (iii) 6 सेमी

4. पूजा कम दौड़ी, 20 मीटर

5. 6 सेमी 6. 78 मीटर 7. 45 मीटर

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 14.2

1. (i) 9 वर्ग सेमी (ii) 4 वर्ग सेमी (iii) 17 वर्ग सेमी
   (iv) 8 वर्ग सेमी (v) 10 वर्ग सेमी (vi) 13 वर्ग सेमी
   (vii) 20 वर्ग सेमी (viii) 7 वर्ग सेमी (ix) 9 वर्ग सेमी
2. 16 वर्ग सेमी , 16 वर्ग सेमी , 16 वर्ग सेमी
3. (i) 12 वर्ग सेमी (ii) 180 वर्ग सेमी (iii) 11 वर्ग सेमी
4. 80 वर्ग मी.
5. 81 वर्ग सेमी
6. (i) 16,000 वर्ग सेमी (ii) 12,600 वर्ग सेमी (iii) 20,000 वर्ग सेमी
   (iv) 19,000 वर्ग सेमी
7. 6 मीटर
8. 42 वर्ग मीटर
9. (i) चार गुना (ii) 12 गुना
10. (i) एक चौथाई (ii) चार गुना

प्रश्नावली 14.3

1. (iii) व (iv) में परिमाप समान व क्षेत्रफल भिन्न
2. गोपी के खेत का, 100 वर्ग मीटर
3. लम्बाई = 9.5 सेमी , वर्ग का क्षेत्रफल 2.25 वर्ग सेमी अधिक
4. (i) परिमाप में 30 सेमी वृद्धि
   (ii) परिमाप में 15 सेमी की वृद्धि
5. (i) 130 सेमी
   (ii) 32 सेमी
   (iii) बढ़ती है।
6. (i) 16 वर्ग सेमी
   (ii) 7 वर्ग सेमी
   (iii) घटती है।

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 15.1

1. (i) प्राथमिक (ii) द्वितीयक (iii) प्राथमिक (iv) द्वितीयक

2.

आयु	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
11	| | |	3
12	𝍸 |	6
13	𝍸 𝍸 |	11
14	𝍸 | | |	8
15	|	1
16	|	1
योग		30

3. (i) 21 विद्यार्थी (ii) 13 वर्ष के 11 विद्यार्थी (iii) 20 विद्यार्थी

अंक	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
4	|	1
5	| | | |	4
6	𝍸	5
7	𝍸	5
8	𝍸 |	6
9	| | |	3

(i) 10 अंक (ii) 15 विद्यार्थी (iii) 6 विद्यार्थी

4. (i) परिवार D (ii) परिवार C (iii) अन्तर =6-2=4 सदस्य (iv) 21 सदस्य

5. (i) 25 लिफाफे (ii) सोमवार (iii) 175 रु

(iv) बेचे गए लिफाफे = 135 और मूल्य 675 रु.

6. (i) 8 (ii) क्रिकेट (iii) 0

www.rajteachers.com

प्रश्नावली 15.2

1

वार	संकेत ⊘ = 5 मरीज
सोमवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
मगंलवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
बुधवार	⊘ ⊘ ⊘
गुरूवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
शुक्रवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
शनिवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘
रविवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘

2.

विषय	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
हिन्दी	𝍸	5
गणित	𝍸 |||	8
अंग्रेजी	||||	4
विज्ञान	||||	4
संस्कृत			1
कम्प्यूटर शिक्षा	||	2
सा. विज्ञान			1

सबसे अधिक पसंद किया जाने वाला विषय गणित।

सबसे कम पसंद किया जाने वाला विषय संस्कृत व सा. विज्ञान।

3

	संकेत 🧍 = 5 मतदाता
साईकिल	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
टीवी	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
गेंद	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
पंखा	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍

(i) गेंद (ii) 350-300=50 वोट

www.rajteachers.com

4 (i)

छात्रों की ऊँचाई (सेमी)	मिलान चिह्न	छात्रों की संख्या
148	||	2
149	||	2
150	||	2
151	|||	3
152	𝍸 ||||	9
153	𝍸	5
154	||	2

(ii)

ऊँचाई (सेमी)	संकेत ☺ = 1 छात्र
148	☺☺
149	☺☺
150	☺☺
151	☺☺☺
152	☺☺☺☺☺☺☺☺☺
153	☺☺☺☺☺
154	☺☺

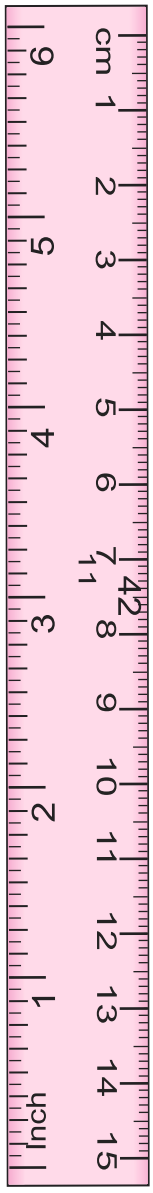
(iii) 154 सेमी

(iv) 6 सेमी

प्रश्नावली 15.3

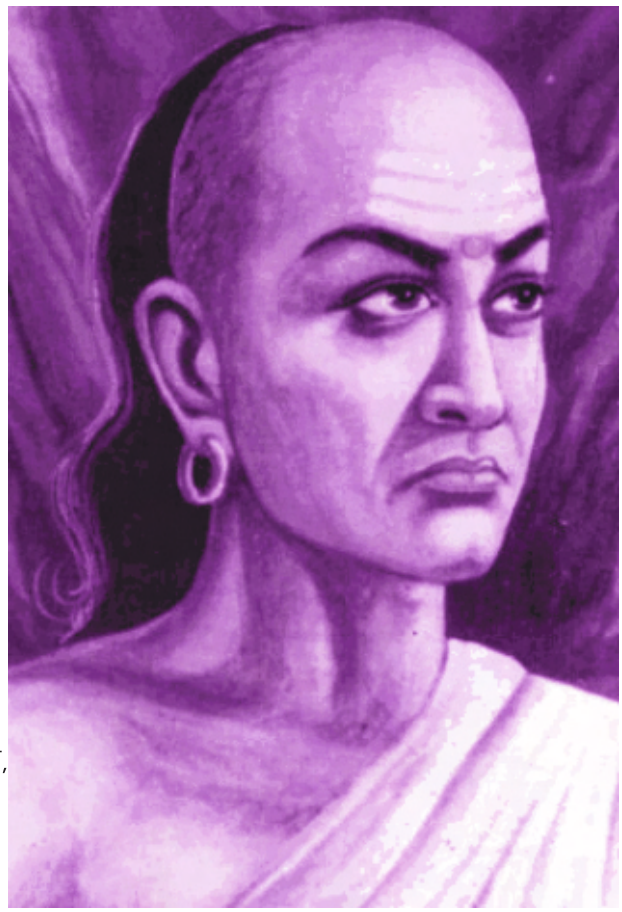
1. (i) 1 सेमी = 10 विद्यार्थी (ii) 60 विद्यार्थी (iii) 2012 में
2. (i) हाथी (ii) बकरी (iii) 28 वर्ष-22 वर्ष= 6 वर्ष
4. (i) ग्वार, 24,000 किग्रा (ii) 88600 किग्रा (iii) बाजरा
6. (i) 12 (ii) 60–80 (iii) 19

www.rajteachers.com



www.rajteachers.com

महान गणितज्ञ आर्यभट्ट



आर्यभट्ट का जन्म 476 ई. में कुसुमपुर में हुआ था। कुसुमपुर को बाद में पाटलीपुत्र कहा गया है। और वर्तमान में यह बिहार की राजधानी पटना है। आर्यभट्ट ने 23 वर्ष की आयु में सन् 499 ई. में आर्यभट्टीय नामक ग्रंथ की रचना की। इस ग्रन्थ के चार प्रमुख भाग हैं।

1. गीतिका पाद
2. गणित पाद
3. काल क्रिया पाद
4. गोल पाद।

आर्यभट्टीय के गणित पाद में संख्या स्थान निरुपण, वर्ग और घन परिकर्म, वर्गमूल, घनमूल, त्रिभुज, वृत्त और समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल तथा गोल और पिरामिड का आयतन तथा π का मान है।

आर्यभट्टीय पर भास्कर प्रथम (629 ई.) में भाष्य लिखा है। यह भाष्य बहुत प्रसिद्व है। आर्यभट्ट पहले गणितज्ञ है जिन्होंने परिधि और व्यास के अनुपात अर्थात (π) पाई का लगभग परिमित मान ज्ञात किया था। पृथ्वी गोल है ऐसा कहने वाले प्रथम खगोलशास्त्री है। सूर्य स्थिर है तथा पृथ्वी आदि ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं यह आर्यभट्ट ने सर्वप्रथम बताया।

भारत ने 19 अप्रेल 1975 को अन्तरिक्ष में अपना पहला उपग्रह छोड़ा उसका नाम आर्यभट्ट रखकर उनके योगदान के प्रति सम्मान प्रकट किया है।

www.rajteachers.com